Engineering
Library
TK
6540
A62

ANNALES

DE

RADIOÉLECTRICITÉ

COMPAGNIES FRANÇAISES ASSOCIÉES DE T.S.F.

79, Boulevard Haussmann, 79

PARIS

TOME I. OCTOBRE 1946. N° 6.

Tome I Octobre 1946 N° 6

ANNALES

DE

RADIOÉLECTRICITÉ

COMPAGNIES FRANÇAISES ASSOCIÉES DE T.S.F.

COMPAGNIE GÉNÉRALE DE T.S.F.
SOCIÉTÉ FRANÇAISE RADIOÉLECTRIQUE
LA RADIOTECHNIQUE
SOCIÉTÉ INDÉPENDANTE DE T.S.F.
COMPAGNIE RADIO FRANCE
COMPAGNIE RADIO MARITIME
COMPAGNIE RADIO ORIENT
COMPAGNIE RADIO CINÉMA
LA STÉATITE INDUSTRIELLE
SOCIÉTÉ DES TRAITEMENTS ÉLECTROLYTIQUES

79, Boulevard Haussmann, PARIS

SOMMAIRE

L. Bouthillon. — Les tenseurs et l'électricité 345

J. Bernier. — Sur le rendement de conversion des tubes à modulation de vitesse du type reflex 359

N. Thien-Chi. — Utilité des examens radiocristallographiques dans l'industrie des tubes à vide 383

R. Suart. — Récents développements de la technique des lampes d'émission. Une série de lampes modernes 391

P. Giroud. — Le navigateur « Decca » 409

Table des Matières du Tome I 435

La reproduction des Mémoires et figures publiés dans les *Annales* est autorisée moyennant l'indication complète d'origine.

Les *Annales de Radioélectricité* ne sont pas mises en vente dans le commerce.

LES TENSEURS ET L'ÉLECTRICITÉ [1]

PAR LÉON BOUTHILLON,

Maître de Conférences de Physique à l'École Polytechnique,
Directeur à la Compagnie Générale de Télégraphie sans fil.

SOMMAIRE. — *Après avoir signalé les incohérences auxquelles conduit, en électromagnétisme et dans les relations entre électricité et optique, la représentation des intensités de champ magnétique par des vecteurs, et des charges magnétiques par des scalaires, l'auteur définit les entités scalaires, polaires, axiales, pseudoscalaires, puis introduit les diverses catégories de tenseurs et montre qu'elles peuvent servir à représenter les diverses catégories d'entités. Il fait voir que, moyennant ces correspondances, les incohérences se changent en concordances.*

Les éléments essentiels du calcul tensoriel sont ensuite exposés, ainsi qu'une notation originale dérivant de la notation vectorielle. Les caractéristiques du calcul tensoriel sont mises en évidence.

L'auteur applique les résultats ainsi obtenus à l'électrostatique et à la magnétostatique. Il montre que les deux théories coulombiennes du magnétisme, ainsi que la théorie coulombienne classique de l'électrostatique et une théorie ampérienne de l'électrostatique introduite précédemment peuvent être développées parallèlement, d'où mise en évidence de rapprochements et de distinctions intéressants.

Enfin, les équations de Maxwell sont données en notations tensorielles, et mises sous une forme faisant ressortir des symétries particulières.

I. — INCOHÉRENCES.

En juin 1785, dans une mémorable communication à l'Académie des Sciences de Paris, Coulomb, décrivant des expériences sur les attractions et répulsions électrostatiques, concluait que l'action répulsive de deux balles électrisées de la même nature de l'électricité suit la raison inverse du carré des distances; c'est la loi classique

$$f = \frac{mm'}{r^2}. \tag{1}$$

Dans un second Mémoire communiqué quelques mois plus tard, le résultat était étendu aux électricités de natures différentes.

Une masse électrique m produit dans l'espace qui l'entoure une modification qui se manifeste par l'application d'une force f à toute autre masse électrique m'. La formule (1) donne la grandeur de cette force. Quant à sa direction, qu'il reste à préciser, elle est celle de la droite mm'. Son sens est celui de m' vers m si m et m' sont des quantités d'électricité de signes contraires; de m vers m' si elles sont de même signe.

Du coup, la théorie de l'électrostatique pouvait se fonder sur une base solide, que les apports successifs de la science n'ont pas ébranlée.

L'expérience ne révélait aucune raison de ne pas considérer les masses électriques comme des scalaires, c'est-à-dire des entités indépendantes du choix des axes de référence, ayant les symétries d'une sphère. Dans ces conditions, la force $\bar{f}$, grandeur, direction et sens, se trouvait complètement définie par la formule vectorielle

$$\bar{f} = -kmm'\frac{\bar{r}}{r^3}, \tag{2}$$

$\bar{r}$ étant le vecteur dirigé de m' vers m, dont la grandeur est la distance r des points m et m'.

Si l'on pose

$$\bar{f} = m'\bar{E}, \tag{3}$$

[1] Conférence faite à l'École Polytechnique le 19 février 1946.

$\overline{E}$ est le vecteur « champ électrique » qui caractérise en tout point de l'espace la modification créée par la présence de la masse électrique m.

Et toute la théorie de l'électrostatique s'en déduit, compte tenu des caractéristiques des conducteurs et des isolants.

Dans le second Mémoire sur l'électricité et le magnétisme auquel j'ai fait allusion ci-dessus (1785), Coulomb montra que les actions entre aimants pouvaient, elles aussi, s'interpréter par la formule (1), m et m' étant maintenant les masses magnétiques. Il n'y avait dans les résultats d'expérience aucune raison de supposer que ces masses n'étaient pas, elles aussi des scalaires. Le champ magnétique $\overline{E}$ devait dès lors, comme le champ électrique, être représenté par un vecteur [formule (3)]. Et la théorie de la magnétostatique se développa suivant les mêmes lignes que celles de l'électrostatique, à la seule différence près qu'il n'existait pas en magnétisme de substances ayant les propriétés correspondant à celles des conducteurs électriques. Cet étroit parallélisme de nature entre les entités qui portent le même nom en électricité et en magnétisme, ainsi que l'identité de forme des lois qui les relient, sont à la base de l'enseignement classique, et constituent encore un dogme pour un grand nombre d'électriciens.

Cependant, si tout va bien tant qu'on ne sort pas du domaine de l'électrostatique et de la magnétostatique, les choses se gâtent quand on aborde les actions réciproques des courants et des aimants.

Car il y a un principe de logique suivant lequel il n'est pas d'effet sans cause. Il exige, dans le domaine de la physique, qu'il n'existe dans les conséquences aucune dissymétrie qui ne soit dans les données. Ainsi une force appliquée à une masse au repos ne peut la déplacer que dans sa direction; un couple, produit par deux forces situées dans un plan, ne saurait faire sortir de ce plan le système de masses auquel il est appliqué.

Examinons, de ce point de vue, quelques phénomènes d'électromagnétisme.

1° Considérons un élément de conducteur AB parcouru par un courant électrique suivant le sens de la flèche. La loi, qu'il nous faut appeler maintenant loi de Biot et Laplace pour nous conformer à un vœu récent de la Société française des Électriciens, nous enseigne que la force appliquée de son fait à la masse m de magnétisme est normale au plan ABm (*fig.* 1). Mais tout dans les données si l'on considère la masse magnétique comme scalaire est symétrique par rapport au plan contenant l'élément de courant et le point m. L'expérience qui nous donne une force dissymétrique par rapport à ce plan est en contradiction avec la logique.

Fig. 1.

2° Faisant intervenir un élément de courant AB alors qu'il n'y a que des courants fermés l'exemple ci-dessus peut sembler uniquement théorique. En voici qui sont parfaitement concrets. Soit L (*fig.* 2)

Fig. 2.

une spire circulaire parcourue par un courant dans le sens de la flèche. Considérons deux points A et B de l'axe, à égale distance du plan de la spire. L'ensemble des données est symétrique par rapport à ce plan. Représentons le champ magnétique en A et B par un vecteur. L'expérience montre qu'en A et B ces vecteurs sont égaux et de même sens, et, contrairement au principe de logique énoncé plus haut, l'effet contient une dissymétrie qui n'existait pas dans les données.

3° Plaçons un conducteur rectiligne X'X parcouru par un courant dans l'entrefer d'un aimant (*fig.* 3).

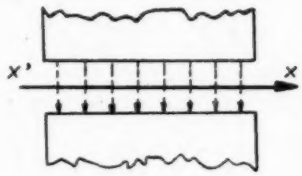


Fig. 3.

Suivant la conception classique les lignes de force magnétique sont les perpendiculaires aux pôles de l'aimant figurées en pointillé. Tout étant symétrique par rapport au plan de la figure, rien ne nous autorise à concevoir que le conducteur puisse être le siège d'actions qui l'en fassent sortir. C'est cependant ce qui se produit : on sait que suivant la loi de Laplace, les forces appliquées au conducteur sont normales à ce plan.

4° Supposons maintenant que le conducteur précédent, faisant partie d'un circuit fermé sans force électromotrice, se déplace normalement au plan de la figure 3 dans l'entrefer de l'électroaimant. Considérons un point A du conducteur. En ce point A la vitesse est représentée par un vecteur $\overline{V}$ normal au plan de la figure 3. Si nous attribuons un caractère vectoriel au champ magnétique, il est représenté par un vecteur $\overline{B}$ normal à $\overline{V}$ (*fig.* 4). Toute la

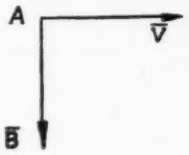


Fig. 4.

figure 4 est située dans le plan VAB normal au conducteur. En ce qui concerne le point A tout est symétrique par rapport à ce plan. Rien ne nous autorise en conséquence à concevoir le phénomène d'induction que l'expérience révèle et qui consiste en un champ électromoteur normal au plan, dirigé dans un sens déterminé et ayant pour conséquence un courant dans le conducteur, normalement au plan.

5° Quittant le domaine de l'électromagnétisme, considérons le phénomène de la polarisation rotatoire magnétique (*fig.* 5). Soit AB un rayon lumineux.

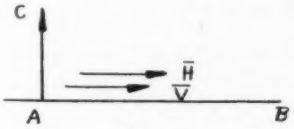


Fig. 5.

Il est constitué par une vibration AC qui se propage, parallèlement à elle-même, le long de AB, avec une vitesse v. Supposons que la propagation se fasse dans un champ magnétique H représenté suivant les conceptions classiques par un vecteur parallèle au rayon. Toute la figure est dans le plan AB. Tout est symétrique par rapport à ce plan. Rien ne donne l'idée qu'il peut se produire, du fait du champ magnétique, une rotation du vecteur AC autour de AB. Or on constate, à l'arrivée de la vibration lumineuse en B, que le plan de polarisation a tourné.

Les exemples pourraient être multipliés. Il n'est pas étonnant que, pour les débutants, l'électricité soit un casse-tête chinois.

II. — Symétries et représentation tensorielle des entités et des lois physiques.

1. Entités scalaires, polaires, axiales pseudo-scalaires.

Nous trouverons la solution des difficultés signalées dans des distinctions imposées par les symétries des entités de la physique.

L'examen des symétries et des dissymétries conduit à classer la plupart de ces entités dans les catégories suivantes :

Entités scalaires. — J'en ai déjà indiqué plus haut les caractéristiques; une masse mécanique, une quantité de chaleur, une quantité d'énergie, une longueur, une surface ou un volume considérés indépendamment de tout sens et de toute orientation, sont complètement déterminés quand leur mesure est connue, quand on sait qu'ils valent tant de grammes, de calories, de joules, de mètres, de mètres carrés, de mètres cubes. Le nombre qui les représente est indépendant du système de référence auquel ils sont rapportés : ce sont des *entités scalaires.*

Entités polaires. — Un déplacement élémentaire, une vitesse, une accélération, une force ont les mêmes symétries qu'un vecteur géométrique. Ils ont comme lui trois composantes, qui changent de signe quand on inverse le système de référence, supposé rectangulaire : ce sont des *entités polaires.*

Entités axiales. — Une vitesse angulaire, une vitesse aréolaire, un déplacement angulaire, une rotation, un moment de couple, une petite surface à contour dirigé, ont les mêmes symétries qu'un petit cercle orienté par un sens marqué sur la circonférence (*fig.* 6); ils ont comme lui trois composantes

Fig. 6.

qui varient comme les composantes d'un vecteur par changement du système de référence, tant qu'on ne renverse pas celui-ci, mais qui, contrairement à celles d'un vecteur, ne changent pas de signe par renversement du système de référence; ce sont des *entités axiales.*

Entités pseudoscalaires. — Un produit mixte de trois vecteurs A, B, C, égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

a pour grandeur le volume construit sur les trois vecteurs $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$. Il est comparable à un scalaire en ce que sa grandeur ne varie pas dans un changement d'axes ne comportant pas renversement du système de référence; mais contrairement au scalaire, il y a changement de signe par renversement du système de référence. Les symétries sont celles d'un toton (*fig.* 7). Les entités qui possèdent ces propriétés sont dites *pseudoscalaires*.

Fig. 7.

La notation vectorielle, telle du moins qu'elle est couramment employée, ne distingue pas entre scalaires et pseudoscalaires, ni entre entités polaires et entités axiales. Elle permet ainsi des confusions que l'introduction des tenseurs permet d'éviter.

2. Définition des tenseurs.

I. *Tenseurs de divers ordres.* — Limitons-nous au cas qui suffit pour la plupart des applications de physique ou de mécanique, de trois variables x_1, x_2, x_3 pouvant être les coordonnées d'un point dans un système d'axes rectangulaires.

Scalaire. — Un scalaire, ou tenseur d'ordre zéro, est une fonction des variables qui ne change pas dans une transformation (ou un changement d'axes), même si celui-ci comporte un renversement du système de référence.

Tenseur de premier ordre. — Trois fonctions T_1, T_2, T_3 sont les composantes d'un tenseur du premier ordre si elles se transforment, dans un changement d'axes, comme les composantes d'un vecteur. Un renversement du trièdre de référence change de signe les composantes d'un tenseur du premier ordre.

Tenseur du second ordre. — Considérons les neuf produits deux à deux des composantes de deux tenseurs du premier ordre. Nous disons qu'ils sont les composantes d'un tenseur du second ordre et nous généralisons en appelant tenseur du second ordre tout ensemble de neuf fonctions de x_1, x_2, x_3 qui se transforment suivant la même loi dans un changement de coordonnées. Un renversement du système de référence ne modifie pas les composantes d'un tenseur du second ordre.

Généralisation. — La définition peut évidemment se généraliser. Un tenseur du troisième ordre est un ensemble de $3^3 = 27$ fonctions de x_1, x_2, x_3 qui dans un changement de coordonnées se transforment comme les 3^3 produits trois à trois des composantes d'un tenseur du premier ordre. Un renversement du système de référence change de signe les composantes d'un tenseur du troisième ordre. Et ainsi de suite.

II. *Tenseur antisymétrique du second ordre.* — Un tenseur du second ordre est dit *antisymétrique* ou symétrique gauche si

$$T_{ij} = -T_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

et par conséquent,

$$T_{ii} = 0.$$

Le tableau des composantes est

$$\begin{vmatrix} 0 & T_{12} & -T_{31} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} \\ T_{31} & -T_{23} & 0 \end{vmatrix}.$$

Les composantes distinctes sont au nombre de trois, soit T_{23}, T_{31}, T_{12}. Elles ne changent pas de signe par renversement des axes.

III. *Tenseur antisymétrique du troisième ordre.* — Un tenseur du troisième ordre est dit *antisymétrique* si deux composantes quelconques déduites l'une de l'autre par la permutation de deux des indices sont égales et de signes contraires.

On voit immédiatement qu'un tel tenseur n'a que six composantes différentes de zéro, réparties en deux groupes de trois; les trois composantes du premier groupe sont égales entre elles; celles du second sont égales et de signe contraire aux premières; on a

$$T_{123} = T_{231} = T_{312} = -T_{213} = -T_{321} = -T_{132}.$$

Un tenseur antisymétrique du troisième ordre est donc représenté par une seule composante, par exemple T_{123}.

Cette composante n'est pas modifiée dans un changement de coordonnées ne comportant pas renversement du système de référence; elle change de signe par renversement des axes.

3. Représentation tensorielle des entités et des lois.

Il suffit de rapprocher les caractéristiques des diverses catégories d'entités de celles des tenseurs pour reconnaître qu'on peut représenter :

— une entité scalaire par un scalaire mathématique;

— une entité polaire par un tenseur du premier ordre, ou tenseur polaire;

— une entité axiale par un tenseur antisymétrique du second ordre, ou tenseur axial;

— une entité pseudoscalaire par un tenseur antisymétrique du troisième ordre, ou tenseur pseudoscalaire.

Ainsi les diverses catégories d'entités, considérées du point de vue de leurs symétries, correspondent à des tenseurs de natures différentes.

Quant aux lois qui les relient, elles s'expriment par des relations entre tenseurs, et comme telles, sont indépendantes du système de référence.

Les études et les exposés peuvent être poursuivis au moyen du calcul tensoriel qui constitue une véritable algèbre des symétries.

4. Représentation géométrique des entités.

Géométriquement un tenseur de premier ordre (ou une entité polaire) peut être représenté par un vecteur; un tenseur antisymétrique du second ordre (ou une entité axiale), soit par un petit cercle avec sens de parcours indiqué sur la circonférence,

Fig. 8.

soit par un tronçon de droite AB non dirigé, avec une flèche circulaire indiquant un sens de rotation (*fig.* 8 et 9).

Fig. 9.

Ces représentations, conformes à la nature des entités, apportent une simplification considérable en rendant intuitives des relations dont la représentation vectorielle usuelle, qui confond scalaires et pseudoscalaires, entités axiales et entités polaires, fait un défi à la logique.

III. — Concordances.

Supposons le champ magnétique axial et, suivant la suggestion qui vient d'être faite, représentons-le non plus par un vecteur, mais par un petit cercle situé dans un plan normal à ce qu'on appelle ordinairement la direction du champ magnétique.

Nous allons voir les incohérences signalées plus haut se transformer en concordances.

1° Reprenons notre élément de conducteur AB parcouru par un courant dans le sens de la flèche. Le champ magnétique en *m* supposé axial, est représenté par un cercle de centre *m* situé dans le plan *m*AB. Tout, dans le résultat comme dans les données, est dans le plan *m*AB; il n'y a pas dans les conséquences de dissymétrie qui ne soit dans les données (*fig.* 10).

Fig. 10.

2° Prenons, comme nous l'avons fait plus haut, une spire circulaire L parcourue par un courant (*fig.* 11). Au centre O, par exemple, le champ magné-

Fig. 11.

tique sera représenté par un cercle C concentrique à L et orienté dans le même sens. A l'échelle près, la figure du champ magnétique est le circuit même qui le produit. En deux points A et B situés sur l'axe de L et à égale distance de son centre les champs magnétiques sont figurés par deux cercles identiques dont les contours sont orientés dans le même sens. Notre figure est symétrique par rapport au plan du circuit, dissymétrique par rapport à tout plan passant par l'axe. C'est ce que nous avions reconnu nécessaire.

3° et 4° Revoyons maintenant le cas examiné plus haut où un conducteur placé dans l'entrefer d'un électroaimant produit un champ magnétique. En un point A le champ magnétique est représenté par un petit cercle situé dans un plan parallèle aux faces de l'entrefer, que nous désignons comme plan horizontal. Sur la figure 12 nous avons en haut le système en élévation, en bas une coupe faite par le plan horizontal. Plaçons, dans ce plan, un conducteur X'X.

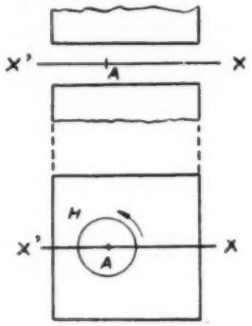


Fig. 12.

Si ce conducteur est parcouru par un courant, les masses électriques libres qu'il contient (on sait que ce sont des électrons) se déplacent dans un sens déterminé (AX par exemple). Représentons en $\overline{V}$ leur vitesse (*fig.* 13 *a*).

Si au contraire le conducteur n'est le siège d'aucune force électromotrice, les électrons sont au repos par rapport à la matière (ou du moins leur vitesse

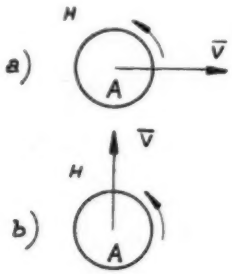


Fig. 13.

moyenne est nulle). Mais supposons que le conducteur se déplace d'avant en arrière dans le plan horizontal qui le contient. Les électrons suivent le mouvement. Soit (*fig.* 13 *b*) V leur vitesse. Elle est normale à la précédente.

Dans les deux cas le champ magnétique est figuré par le cercle H.

Si nous représentons ce qui se passe aux divers points du conducteur, nous avons dans le cas d'un conducteur X'X parcouru par un courant la figure 14 *a*.

Si le conducteur X'X supposé sans force électromotrice se déplace dans le plan horizontal X'X, un de ses points A décrivant la droite AY, avec une vitesse $\overline{V}$, l'électron placé en A se trouve, sur sa trajectoire, soumis aux champs magnétiques représentés par la figure 14 *b*.

Les données étant ainsi précisées, cherchons à prévoir les conséquences.

Les figures 14 *a* et 14 *b* sont toutes deux dans le plan horizontal X'X de la figure 12. Nous devons donc nous attendre à ce que l'action exercée en un

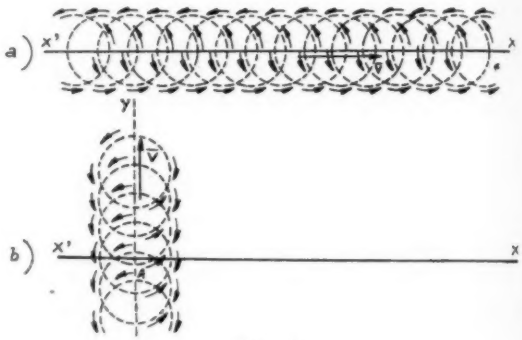


Fig. 14.

point A du conducteur soit dans ce plan. C'est bien ce que donne l'expérience : dans le cas d'un conducteur parcouru par un courant, déplacement suivant la loi de Laplace; dans le cas du conducteur mobile, courant dans le conducteur suivant la loi de l'induction, le tout dans le plan horizontal X'X.

Nous pouvons aller plus loin. Les deux figures 13 *a* et 13 *b* étant les mêmes, à une rotation de 90° près, nous devons prévoir les mêmes effets dans les deux cas représentés, dans des directions à angle droit. La figure 13 *b*, c'est le cas du mouvement d'un conducteur dans un champ magnétique. C'est celui de l'induction, et l'on sait qu'alors les électrons se déplacent dans le conducteur normalement à $\overline{V}$, suivant $\overline{V}'$ (*fig.* 15 *b*). Dans la figure 15 *a* (action d'un champ magnétique sur un conducteur parcouru par un courant) nous devons donc nous attendre à ce que les électrons soient poussés suivant $\overline{V}'$, perpendiculairement à la vitesse $\overline{V}$; mais ils ne peuvent sortir du conducteur; il y a réaction sur les molécules et c'est le conducteur lui-même qui se déplace suivant $\overline{V}'$ (*fig.* 15 *a*), c'est-à-dire perpendiculairement au V' de la figure 15 *b*. Et l'expé-

rience vérifie cette conclusion. Qu'il y ait courant dans le conducteur dans un cas et déplacement du conducteur dans l'autre apparaît ainsi comme une conséquence immédiate de l'axialité du champ magnétique.

Mais nous n'avons pas encore tiré de nos figures tout ce qu'elles contiennent. Prenons la figure 14 *a* (cas d'un conducteur traversé par un courant et placé dans un champ magnétique). Elle est dissymétrique par rapport à la droite X'X tandis que

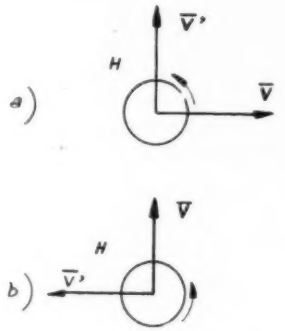


Fig. 15.

tous les points de cette droite sont le siège d'actions identiques. Ces conditions n'imposent pas par elles seules un mouvement du conducteur X'X, mais elles exigent que, si ce mouvement a lieu, il se produise dans le plan horizontal X'X, normalement à X'X et dans un sens déterminé. C'est ce que l'expérience vérifie.

5° Considérons maintenant un rayon lumineux se propageant dans un champ magnétique. Soit (*fig.* 16 *a*) AC le support de la vibration lumineuse,

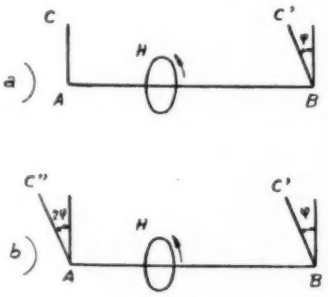


Fig. 16.

supposée au départ dans le plan du papier, AB la direction de propagation. Quant au champ magnétique en un point du parcours, il est représenté par un cercle $\overline{H}$ normal à AB et dont la circonférence est parcourue dans un sens déterminé. La figure fait imaginer immédiatement un entraînement de AC par le champ magnétique (dans le sens de la flèche ou dans le sens inverse) en suite duquel la vibration tourne autour de AB en même temps qu'elle se propage et, arrivée en B, fait un angle φ avec sa direction primitive.

Supposons (*fig.* 16 *b*) qu'à ce moment le rayon lumineux soit réfléchi par un miroir et renvoyé dans la direction BA. Entraîné par le champ magnétique, il continue à tourner dans le même sens qu'avant la réflexion, et de retour en A, fait l'angle 2φ avec AC. Nous reconnaissons les caractéristiques expérimentales de la polarisation rotatoire magnétique.

Si au lieu d'un champ magnétique le rayon lumineux avait traversé un quartz d'axe parallèle à la direction de propagation, le phénomène aurait été tout différent. De A en B la vibration aurait tourné de l'angle φ, par exemple dans le sens de la rotation d'un tire-bouchon avançant avec le rayon lumineux. Au retour, de B en A, la rotation se faisant suivant la même loi aurait été en sens contraire et, quand le rayon arrive en A, le plan de polarisation aurait été le même qu'au départ.

Dans tous les exemples examinés la concordance est parfaite entre les indications de l'expérience et les conclusions tirées de l'examen des symétries et des dissymétries. Ne peut-on résumer cette discussion en disant que les lois de l'électromagnétisme, de l'électrodynamique et de l'induction, incompatibles avec l'attribution du caractère polaire au champ magnétique, deviennent intuitives avec la représentation axiale.

Nous pouvons conclure :

1° La distinction entre entités scalaires, polaires, axiales, pseudoscalaires n'est pas affaire de convention; elle tient à la nature des choses, elle est fondamentale.

2° Les symétries et dissymétries ont une grande importance. Reconnues et précisées dans les causes elles tracent un cadre d'où ne peuvent sortir les effets et hors duquel il est inutile de les chercher; à ce titre elles facilitent et guident le travail scientifique. Les distinctions nécessaires évitent les confusions. La représentation géométrique devient adéquate à la nature des entités et simplifie l'intelligence de leurs relations; les exposés sont plus logiques; ils se trouvent affranchis d'artifices et de conventions qui gênent la pleine compréhension des phénomènes; les effets deviennent la suite naturelle des causes.

3° L'importance de la concordance entre les indications de l'expérience et les conclusions tirées des représentations géométriques est évidente pour l'enseignement élémentaire de l'électricité, qui n'apparaît plus comme une suite d'invraisemblances. Elle ne l'est guère moins pour l'enseignement supérieur; il n'est jamais mauvais que la représentation géométrique facilite l'application du précepte de nos maîtres successifs : « Voir dans l'espace ». Il semble même que ce soit son principal objet.

IV. — Définition et notions.

Nous avons jusqu'ici, pour éviter de masquer la simplicité des principes sous un appareil mathématique, écarté le calcul de notre discussion. Nous avons vu cependant qu'aux diverses classes d'entités la théorie des tenseurs fournit des représentations adéquates, et qu'ainsi les lois de la physique, s'expriment par des relations entre tenseurs. Et l'instrument de travail approprié à leur établissement et à la recherche de leurs conséquences sera le calcul tensoriel. Nous allons constater que ses principes sont extrêmement simples.

1. Représentation des tenseurs.

Nous représentons un tenseur par une lettre surmontée d'indices pleins, de forme quelconque par exemple ▬, •, ▲, en nombre égal au nombre des tenseurs. T, $\overline{T}$, $\overline{\overline{T}}$, $\overline{\overline{\overline{T}}}$ figurent respectivement des tenseurs d'ordre 0, 1, 2, 3.

Nous indiquons qu'un tenseur du second ordre est antisymétrique en surmontant ses deux indices de la liaison ›. Ainsi $\overline{\overline{T}}$ est un tenseur antisymétrique du second ordre.

Étant antisymétrique par rapport à tous ses couples d'indices, un tenseur antisymétrique du troisième ordre sera représenté par la notation $\overline{\overline{\overline{T}}}$, ou simplement $\overline{\overline{\overline{T}}}$ puisqu'un tenseur du troisième ordre antisymétrique par rapport à deux couples d'indices l'est également par rapport au troisième.

2. Contraction.

Soit par exemple un tenseur $\overline{\overline{\overline{T}}}$ du troisième ordre. Formons les sommes des composantes dans lesquelles deux indices, par exemple le premier et le troisième ont la même valeur tandis que l'autre indice est fixe. Nous obtenons les trois expressions :

$$T_{111} + T_{212} + T_{313},$$
$$T_{121} + T_{222} + T_{323},$$
$$T_{131} + T_{232} + T_{333}.$$

On démontre que ces trois sommes sont les composantes d'un tenseur du premier ordre que nous désignerons par la notation

$$\overline{\overline{T}}$$

obtenue en « vidant » les deux indices sur lesquels porte la contraction.

La contraction peut être appliquée à un tenseur d'ordre quelconque. Elle abaisse de deux unités l'ordre du tenseur. Par exemple

$$\overline{\overline{T}} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

$$\overline{\overline{\overline{T}}} = T_{1111} + T_{1122} + T_{1133} + T_{2211} + T_{2222} + T_{2233} + T_{3311} + T_{3322} + T_{3333}$$

sont des scalaires.

3. Multiplication.

Le produit de deux tenseurs $\overline{A}$ et $\overline{\overline{B}}$ d'ordres m et n est le tenseur d'ordre $m + n$.

$$\overline{\overline{\overline{T}}} = \overline{A}\,\overline{\overline{B}},$$

dont les composantes sont les produits deux à deux de celles des tenseurs $\overline{A}$ et $\overline{\overline{B}}$.

4. Produits antisymétriques.

L'utilisation des liaisons — et —. permet de former des produits antisymétriques. Nous indiquons les suivants :

1° $\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}}$ tenseur antisymétrique du second ordre dont les composantes (2,3), (3,1), (1,2) sont

$$A_2B_3 - A_3B_2, \quad A_3B_1 - A_1B_3, \quad A_1B_2 - A_2B_1$$

et qui correspond au produit vectoriel de la notation vectorielle.

2° $\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}}$ tenseur antisymétrique du troisième ordre, dont la composante (1, 2, 3) est

$$A_1B_{23} + A_2B_{31} + A_3B_{12}$$

et qui correspond au produit scalaire de la notation vectorielle dans le cas d'une entité polaire $\overline{A}$ et d'une entité axiale $\overline{\overline{B}}$.

3° $\overline{\overline{A}\,\overline{\overline{B}}\,\overline{\overline{C}}}$ tenseur antiysmétrique du troisième ordre dont la composante (1, 2, 3) est le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

et qui correspond au produit mixte de la notation vectorielle.

5. **Produits contractés.**

En combinant la multiplication et la contraction on obtient une grande variété d'opérations et en particulier les correspondants non encore indiqués des divers produits scalaires ou vectoriels de la notation vectorielle (*voir* Tableau I).

6. **Tenseur $\overline{\overline{\nabla}}$.**

On démontre que les symboles de dérivation

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3}$$

se comportent comme les composantes d'un tenseur $\overline{\overline{\nabla}}$. Les combinaisons de $\overline{\overline{\nabla}}$ avec les divers tenseurs forment des dérivées diverses parmi lesquelles se trouvent les correspondants des gradients, divergences, rotationnels, laplaciens de la théorie vectorielle. Il en résulte, en même temps qu'une intéressante rationalisation, plus de simplicité et d'élé-

TABLEAU I.

CORRESPONDANCE DES NOTATIONS.

Tensorielles.	Vectorielles.	Analytiques.
T, $\overline{\overline{\overrightarrow{T}}}$	T	T
$\overline{T}$, $\overline{\overline{\overrightarrow{T}}}$	$\overline{T}$	T_1, T_2, T_3
AB, $A\overline{\overline{\overrightarrow{B}}}$, $\frac{1}{6}\overline{\overline{\overrightarrow{A}}}\,\overline{\overline{\overrightarrow{B}}}$	AB	AB
$A\overline{\overline{B}}$, $A\overline{\overline{\overrightarrow{B}}}$, $\overline{\overline{\overrightarrow{A}}}\,\overline{B}$, $\frac{1}{2}\overline{\overline{\overrightarrow{A}}}\,\overline{\overline{\overrightarrow{B}}}$	$A\overline{B}$	AB_1, AB_2, AB_3
$\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{\overrightarrow{A}}}\,\overline{\overline{\overrightarrow{B}}}$, $\frac{1}{2}\overline{\overline{\overrightarrow{A}}}\,\overline{\overline{\overrightarrow{B}}}$	$\overline{A}\,\overline{B}$	$A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$
$\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{\overrightarrow{B}}}$, $\overline{\overline{\overrightarrow{A}}}\,\overline{\overline{\overrightarrow{B}}}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	$A_2B_3 - A_3B_2$ $A_3B_1 - A_1B_3$ $A_1B_2 - A_2B_1$
$\overline{\overline{\Delta}}A$, $\overline{\overline{\Delta}}\,\overline{\overline{\overrightarrow{A}}}$	grad A	$\frac{\partial A}{\partial x_1}$, $\frac{\partial A}{\partial x_2}$, $\frac{\partial A}{\partial x_3}$
$\overline{\overline{\Delta}}\,\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{\Delta}}\,\overline{\overline{\overrightarrow{A}}}$	div $\overline{A}$	$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$
$\overline{\overline{\Delta}}\,\overline{\overline{\overrightarrow{A}}}$, $\overline{\overline{\Delta}}\,\overline{\overline{\overrightarrow{A}}}$	curl $\overline{A}$, rot $\overline{A}$	$\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}$ $\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}$ $\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}$
$\overline{\overline{\Delta}}\,\overline{\overline{\Delta}}A$, $\Delta^2 A$	lap A	$\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2}$

gance dans les calculs, et l'élimination d'une terminologie empirique, n'ayant de sens que dans les applications à la mécanique des milieux continus.

Nous utiliserons ci-dessous :

— Le *dérivé contracté* $\overline{\nabla}\overline{A}$ du tenseur $\overline{A}$ du premier ordre, qui est le scalaire

$$\overline{\nabla}\,\overline{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3};$$

— Le *dérivé antisymétrique* $\overline{\nabla}\overrightarrow{A}$ du tenseur $\overline{A}$ du premier ordre, qui est le tenseur antisymétrique du second ordre dont les composantes (2,3), (3,1),(1,2) sont respectivement

$$\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3},\quad \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1},\quad \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2};$$

— Le *dérivé contracté* $\overline{\nabla}\overline{\overrightarrow{A}}$ du tenseur $\overrightarrow{A}$, antisymétrique du second ordre, qui est le tenseur du premier ordre dont les composantes 1, 2, 3 sont respectivement :

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial A_{31}}{\partial x_3},\quad \frac{\partial A_{23}}{\partial x_3} - \frac{\partial A_{12}}{\partial x_1},\quad \frac{\partial A_{31}}{\partial x_1} - \frac{\partial A_{23}}{\partial x_2};$$

— Le *dérivé antisymétrique* $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{A}$ d'un tenseur $\overrightarrow{A}$ antisymétrique du second ordre, qui est le tenseur antisymétrique du troisième ordre dont la composante (1, 2, 3) est

$$\frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_3}.$$

7. Caractéristiques du calcul tensoriel.

Établi sur ces bases, le calcul tensoriel peut être substitué avec avantage au calcul vectoriel.

Il se présente comme une extension de celui-ci; la notation proposée dérive directement de la notation vectorielle employée durant de longues années par Lafay dans son cours de physique de l'École Polytechnique.

Alors que le calcul vectoriel confond scalaires et pseudoscalaires, entités polaires et entités axiales, le calcul tensoriel distingue par des notations simples les diverses catégories d'entités. Les symboles ont un sens plus étendu que les symboles vectoriels puisqu'en plus de leur contenu ancien ils représentent maintenant des quantités aussi importantes que les symétries et les dissymétries.

Le calcul tensoriel possède des notations simples pour les produits correspondant aux produits scalaire et vectoriel, ainsi que pour les divergences, gradients, rotationnels, laplaciens du calcul vectoriel.

Il exprime les lois physiques par des équations indépendantes du système de référence.

Le nombre des indices pleins étant égal à l'ordre tensoriel, ces équations sont homogènes par rapport à ces indices. Cette homogénéité, comme celle relative aux dimensions, évite des erreurs.

Enfin le calcul tensoriel est plus simple et plus rationnel que le calcul vectoriel.

V. — Théorie de l'électricité et du magnétisme.

1. Théorème de Stokes.

L'étude des champs de tenseurs polaires ou axiaux est à la base des théories de l'électricité et du magnétisme.

Un théorème de géométrie vectorielle, dû à Stokes, qui se généralise sans difficulté pour le cas des tenseurs axiaux, énonce que :

Tout champ de tenseurs polaires $\overline{Q}$ (c'est-à-dire un domaine en tous les points duquel est défini un tenseur $\overline{Q}$ fonction des coordonnées x_1, x_2, x_3), est décomposable en deux autres $\overline{E}$ et $\overline{B}$ appelés respectivement lamellaire et solénoïdal, et tels que

$$\overline{\nabla}\overline{E} = 0, \qquad \overline{\nabla}\overline{B} = 0.$$

Tableau II.

Théorème de Stokes.

Champ.	Lamellaire.		Solénoïdal.
Polaire	$\overline{Q} = \overline{E}$ $\overline{\nabla}\overline{E} = 0$	+	$\overline{B}$ $\overline{\nabla}\overline{B} = 0$
Axial	$\overline{Q} = \overline{E}$ $\overline{\nabla}\overline{E} = 0$	+	$\overline{B}$ $\overline{\nabla}\overline{B} = 0$

De même tout champ de tenseurs axiaux $\overrightarrow{Q}$ est décomposable en deux autres $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$, appelés respectivement lamellaire et solénoïdal, et tels que

$$\overline{\nabla}\overline{E} = 0, \qquad \overline{\nabla}\overline{B} = 0.$$

2. Champs polaires ou axiaux, lamellaires ou solénoïdaux.

Les théories des deux catégories polaire $\overline{E}$ et axiale $\overline{\vec{E}}$ des champs lamellaires sont étroitement parallèles, se correspondant entité à entité, ligne à ligne, formule à formule, au point que si l'on néglige les différences des symétries des entités correspondantes, comme le fait le calcul vectoriel, il reste un fonds de propriétés communes bien mises en évidence parce qu'alors les formules deviennent les mêmes et qu'ainsi une théorie commune s'applique aux deux catégories.

Et il en est de même pour les deux catégories, polaire $\overline{B}$ et axiale $\overline{\vec{B}}$, des champs solénoïdaux.

Entre les deux catégories, lamellaire $\overline{E}$ et solénoïdale $\overline{B}$, des champs polaires, existe un parallélisme semblable, cependant moins accusé, les deux théories restant distinctes dans la notation vectorielle. Et de même entre les deux catégories, lamellaire $\overline{\vec{E}}$ et solénoïdale $\overline{\vec{B}}$ des champs axiaux.

Ces parallélismes et ces distinctions ont, en électricité et en magnétisme, une importance fondamentale.

3. Électrostatique et magnétostatique.

Supposons d'abord les champs électrique et magnétique constants.

I. *Théorie coulombienne de l'électrostatique.* — L'expérience montre que l'intensité du champ électrique est une entité polaire et lamellaire, donc telle que

$$\overline{\nabla}\,\overline{\vec{E}} = 0 \tag{11}$$

et liée à la densité cubique de l'électricité i par la relation

$$k_e\,\overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\overline{E}} = 4\pi i, \tag{12}$$

k_e étant un coefficient qui dépend du choix des unités. Ceci posé, l'électrostatique sera une simple transposition de la théorie des tenseurs polaires et lamellaires, compte tenu des particularités des conducteurs et des diélectriques révélées par l'expérience, qui conduisent, si l'on veut n'introduire dans les équations que les charges électriques de densité i_l portées par les conducteurs, à substituer à l'équation (12) l'équation

$$k_e\,\overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\overline{B}} = 4\pi i_l, \tag{13}$$

$\overline{B}$ étant un tenseur polaire appelé induction électrique, solénoïdal dans les milieux diélectriques et dans le vide.

La théorie dont nous venons d'exposer le principe n'est autre que la théorie classique de l'électrostatique, les équations fondamentales étant écrites en notations tensorielles.

II. *Théorie coulombienne du magnétisme.* — La théorie traditionnelle du magnétisme, issue comme la précédente des expériences de Coulomb, est en fait celle de l'intensité du champ magnétique. Elle la considère d'abord dans le vide et les aimants. Transformée pour tenir compte du caractère axial de cette entité, elle n'est d'abord autre chose que la transposition de la théorie du tenseur axial et lamellaire et, comme telle est exactement de même forme que la théorie coulombienne de l'électrostatique. $\overline{\vec{E}'}$ intensité du champ magnétique, satisfait à l'équation

$$\overline{\nabla}\,\overline{\vec{E}'} = 0 \tag{21}$$

et est liée à la densité cubique du magnétisme $\overline{\vec{i}}$, entité pseudoscalaire, par la relation, fournie par l'expérience

$$k_m\,\overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\overline{\vec{E}}} = 4\pi\,\overline{\overline{\vec{i}}}. \tag{22}$$

L'étude des aimants conduit d'ailleurs à introduire, comme dans le cas de l'électrostatique, un tenseur induction $\overline{\vec{B}'}$ confondu avec $\overline{\vec{E}'}$ partout ailleurs que dans les aimants, et à substituer à l'équation (22) l'équation

$$\overline{\nabla}\,\overline{\vec{B}'} = 0, \tag{23}$$

analogue à l'équation (13) compte tenu du fait qu'en magnétisme il n'y a pas de charges libres, puisqu'il n'y a pas de corps conducteurs.

S'il existe des courants électriques dans le champ (de densité $\overline{i_l}$), une seconde intensité de champ magnétique E'' se superpose à la précédente, pour laquelle on a, d'après les expériences d'électromagnétisme,

$$a_m\,\overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\overline{\vec{E}''}} = 4\pi\,\overline{i_l}, \tag{24}$$

$$\overline{\nabla}\,\overline{\vec{B}''} = 0. \tag{25}$$

De sorte que le champ total est défini par les deux équations

$$a_m\,\overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\overline{\vec{E}}} = 4\pi\,\overline{i_l} \tag{26}$$

$$\overline{\nabla}\,\overline{\vec{B}} = 0. \tag{27}$$

Tableau III.

Théories de l'électrostatique et de la magnétostatique.

Théories coulombiennes		Théories ampériennes	
de l'électrostatique. 1.	de la magnétostatique. 2.	de la magnétostatique. 3.	de l'électrostatique. 4.
$\overline{\nabla}\overrightarrow{\overline{E}} = 0$	$\overline{\nabla}\overrightarrow{\overline{E}} = 0$	$\overline{\nabla}\overrightarrow{\overline{B}} = 0$	$\overline{\nabla}\overline{\overline{B}} = 0$
$k_e\overline{\nabla}\overline{\overline{E}} = 4\pi i$	$k_m\overline{\nabla}\overrightarrow{\overline{E}} = 4\pi\overrightarrow{\overline{i}}$	$a_m\overline{\nabla}\overrightarrow{\overline{B}} = 4\pi\overline{i}$	$a_e\overline{\nabla}\overrightarrow{\overline{B}} = 4\pi\overrightarrow{\overline{i}}$
$k_e\overline{\nabla}\overline{\overline{B}} = 4\pi i_l$	$\overline{\nabla}\overrightarrow{\overline{B}} = 0$	$a_m\overline{\nabla}\overline{\overline{E}} = 4\pi\overline{i_l}$	$\overline{\nabla}\overrightarrow{\overline{E}} = 0$
	$a_m\overline{\nabla}\overline{\overline{E}} = 4\pi\overline{i_l}$		$k_m\overline{\nabla}\overline{\overline{B}} = 4\pi i_l$
	$\overline{\nabla}\overrightarrow{\overline{B}} = 0$		$\overline{\nabla}\overrightarrow{\overline{E}} = 0$
	$a_m\overline{\nabla}\overline{\overline{E}} = 4\pi\overline{i_l}$		$k_m\overline{\nabla}\overline{\overline{B}} = 4\pi i_l$
	$\overline{\nabla}\overrightarrow{\overline{B}} = 0$		$\overline{\nabla}\overrightarrow{\overline{E}} = 0$

III. *Théorie ampérienne du magnétisme.* — Les expériences d'Œrsted et d'Ampère sur l'électromagnétisme suggèrent une autre théorie dite *ampérienne* du magnétisme, dans laquelle les phénomènes magnétiques sont supposés d'origine purement électrique, l'aimantation étant attribuée à des courants particulaires. J'ai montré que cette théorie prend une forme particulièrement simple et élégante si l'on prend comme tenseur fondamental l'induction magnétique $\overrightarrow{\overline{B}}$. Puisque

$$\overline{\nabla}\overrightarrow{\overline{B}} = 0, \tag{31}$$

elle n'est alors qu'une transposition de la théorie des tenseurs axiaux et solénoïdaux, compte tenu de l'équation complémentaire

$$a_m\overline{\nabla}\overline{\overline{B}} = 4\pi\overline{i}, \tag{32}$$

$\overline{i}$ étant la densité de courant électrique totale. L'étude des aimants conduit d'ailleurs si l'on veut n'introduire dans le second membre que le courant de conduction de densité $\overline{i_l}$ (à l'exclusion des courants particulaires d'Ampère), à substituer dans le premier membre le tenseur intensité du champ magnétique au tenseur induction et à écrire

$$a_m\overline{\nabla}\overline{\overline{E}} = 4\pi i_l. \tag{33}$$

Plus une et plus élégante que la théorie coulombienne, la théorie ampérienne de magnétisme peut être rapprochée de la théorie coulombienne de l'électrostatique, étant basée comme elle sur la considération d'un seul tenseur, dont la nature reste la même tout le long du développement.

IV. *Théorie ampérienne de l'électrostatique.* — Les rapprochements qui précèdent m'ont incité à chercher s'il ne serait pas possible d'introduire une théorie ampérienne de l'électrostatique qui aurait avec la théorie coulombienne des rapports semblables à ceux existant entre les deux théories du magnétisme. J'y ai réussi en considérant d'abord des milieux ne contenant pas de charge électrique libre et en prenant comme tenseur fondamental l'induction électrique $\overline{\overline{B}}$, qui est alors solénoïdale. La théorie débute comme celle des tenseurs polaires et solénoïdaux avec les équations fondamentales

$$\overline{\nabla}\overline{\overline{B}} = 0, \tag{41}$$

$$a_e\overline{\nabla}\overrightarrow{\overline{B}} = 4\pi\overrightarrow{\overline{i}} \tag{42}$$

et l'expérience, basée sur les phénomènes d'induction électromagnétique montre que $\overrightarrow{\overline{i}}$ est la densité du courant magnétique changée de signe, courant qui n'est autre que le courant particulaire, puisqu'il

n'y a pas de magnétisme libre. Si l'on désire ne pas introduire de courant particulaire dans le second membre, on y parvient en remplaçant dans le premier membre l'induction $\overline{B'}$ par l'intensité du champ $\overline{E'}$ et l'équation devient

$$\overline{\overline{\nabla}}\,\overrightarrow{\overline{E'}} = 0. \tag{43}$$

L'introduction des masses électriques libres de densité i_l conduit ensuite à superposer au champ B' un champ B'', lié aux masses par l'équation

$$k_e \overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\overline{B''}} = 4\pi i_l, \tag{44}$$

et l'on a, pour le champ total,

$$k_e \overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\overline{B}} = 4\pi i_l, \tag{45}$$

$$\overline{\overline{\nabla}}\,\overrightarrow{\overline{E}} = 0. \tag{46}$$

Finalement, quelle que soit la théorie utilisée, siot pour le magnétisme, soit pour l'électricité, nous avons abouti aux équations

Électricité.

$$\overline{\overline{\nabla}}\,\overrightarrow{\overline{E}} = 0, \tag{511}$$

$$k_e \overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\overline{B}} = 4\pi i_l. \tag{521}$$

Magnétisme.

$$a_m \overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\overline{\overrightarrow{E}}} = 4\pi \overline{\overline{i_l}}, \tag{512}$$

$$\overline{\overline{\nabla}}\,\overrightarrow{\overline{B}} = 0; \tag{522}$$

les équations (521) et (512) étant remplacées respectivement par les équations

$$k_e \overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\overline{E}} = 4\pi i, \tag{531}$$

$$a_m \overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\overline{\overrightarrow{B}}} = 4\pi \overline{\overline{i}}, \tag{532}$$

si l'on introduit, au lieu de la densité de charge électrique libre i_l et de la densité de courant ohmique $\overline{\overline{i_l}}$ la densité totale de charge électrique i et la densité totale de courant électrique $\overline{\overline{i}}$.

4. Les équations de Maxwell.

Nous n'avons jusqu'ici considéré que des champs électriques ou magnétiques constants. L'extension de la théorie aux champs variables, guidée par les expériences sur l'induction électromagnétique et la géniale intuition de Maxwell, a conduit à compléter les deux équations de la première ligne et à écrire

$$a_e \overline{\overline{\nabla}}\,\overrightarrow{\overline{E}} = -k_m \frac{\partial \overrightarrow{\overline{B}}}{\partial t}, \qquad a_m \overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\overline{\overrightarrow{E}}} = 4\pi i_l + k_e \frac{\partial \overline{\overline{E}}}{\partial t};$$

$$k_e \overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\overline{B}} = 4\pi i_l, \qquad k_m \overline{\overline{\nabla}}\,\overrightarrow{\overline{B}} = 0,$$

avec

$$\frac{k_m k_e}{a_e a_m} = c^2,$$

c étant la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques. C'est la forme tensorielle des équations fondamentales de l'électricité et du magnétisme.

I. Les considérations exposées ci-dessus m'ont conduit à introduire dans les équations du paragraphe précédent :

a. La charge électrique totale, de densité

$$i = i_l + i_p,$$

i_l étant la charge libre et i_p la charge de polarisation, répartie dans les diélectriques.

b. La charge magnétique totale

$$\overline{\overline{\overrightarrow{i}}} = \overline{\overline{\overrightarrow{i_p}}}$$

$\overline{\overline{\overrightarrow{i_p}}}$ étant la charge magnétique d'aimantation, répartie dans les aimants.

c. La densité totale de courant électrique,

$$\overline{\overline{i}} = \overline{\overline{i_l}} + \overline{\overline{i_p}} + \overline{\overline{i_a}},$$

$\overline{\overline{i_l}}$ étant la densité de courant ohmique,

$\overline{\overline{i_p}}$ étant la densité du courant produit par la variation de la polarisation $\overline{\overline{P}}$, tel que

$$\frac{4\pi}{a_m}\overline{\overline{i_p}} = \frac{\partial \overline{\overline{B}}}{\partial t} - \frac{\partial \overline{\overline{E}}}{\partial t},$$

$\overline{\overline{i_a}}$ étant la densité des courants particulaires d'Ampère, telle que

$$\frac{4\pi}{a_m}\overline{\overline{i_a}} = \overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\overline{\overrightarrow{B}}} - \overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\overline{\overrightarrow{E}}}.$$

d. La densité totale de courant magnétique,

$$\overline{\overline{\overrightarrow{i}}} = \overline{\overline{\overrightarrow{i_p}}} + \overline{\overline{\overrightarrow{i_a}}},$$

$\overline{\overline{\overrightarrow{i_p}}}$ étant la densité du courant produit par la variation de l'aimantation, tel que

$$\frac{4\pi}{a_e}\overline{\overline{\overrightarrow{i_p}}} = \frac{\partial \overline{\overline{\overrightarrow{B}}}}{\partial t} - \frac{\partial \overline{\overline{\overrightarrow{E}}}}{\partial t},$$

$\vec{i}_a$ étant la densité du courant particulaire de magnétisme, tel que

$$\frac{4\pi}{a_e}\vec{i}_a = \vec{\nabla}\vec{B} - \vec{\nabla}\vec{E}.$$

Les équations de Maxwell deviennent alors

$$-\vec{\nabla}\vec{B} = \frac{4\pi}{a_e}\vec{i} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = \frac{4\pi}{a_m}\vec{i} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{4\pi}{k_e}i, \qquad \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{4\pi}{k_m}\vec{i}.$$

Ainsi écrites, les équations générales de l'électricité et du magnétisme ont le maximum de symétrie.

VI. — Conclusions.

J'arrête ici cet exposé. Il s'étendrait de lui-même à d'autres domaines de la physique, ainsi qu'à la mécanique et à la géométrie; par l'introduction des tenseurs à quatre variables, il engloberait les théories de la relativité, restreinte et généralisée, où il apporterait la simplification et la clarté. J'ai voulu montrer que, instrument indispensable des recherches de la physique théorique moderne, les conceptions tensorielles ne sont pas moins utiles dans la physique la plus classique.

La distinction entre entités scalaires, pseudo-scalaires, polaires et axiales est nécessaire pour caractériser des qualités aussi essentielles que les symétries et les dissymétries; elle permet des représentations géométriques adéquates à la nature des entités, et j'ai fait voir sur l'exemple de l'électricité et du magnétisme que les lois fondamentales cessaient d'apparaître comme une suite d'invraisemblances pour prendre un aspect intuitif.

Le calcul tensoriel est l'instrument naturellement adapté à la mise en œuvre mathématique de ces conceptions. Les diverses catégories d'entités sont représentées par des tenseurs distincts, qui mettent en évidence non seulement leur grandeur, mais leurs symétries et leurs dissymétries; les lois de la physique s'expriment par des équations tensorielles, indépendantes du système de référence.

A cela s'ajoutent les avantages généralement reconnus au calcul vectoriel, et notamment la concision de l'exposé et la représentation simple des entités mathématiques ordinairement appelées gradient, divergence, rotationnel, laplacien.

Tout cela est ordinairement admis. Mais certains craignent que l'effort nécessaire pour l'initiation au calcul tensoriel ne soit disproportionné vis-à-vis des progrès qu'il apporte. Je vous ai donné les éléments du procès en vous indiquant ci-dessus les règles essentielles du calcul tensoriel, dans le cas simple qui suffit à l'étude de la physique, de la mécanique et de la géométrie classiques.

BIBLIOGRAPHIE.

L. Bouthillon, *Sur quelques aspects de la rationalisation des équations de l'électricité* (*Bull. Soc. franç. Électr.*, 5e série, t. VI, décembre 1936, p. 1175).

— *Sur la nature des grandeurs électriques et magnétiques et l'application de la notation tensorielle aux lois de l'électricité* (*Bull. Soc. franç. Électr.*, 5e série, t. VIII, janvier 1938, p. 41).

— *Sur la nature des entités géométriques, mécaniques, physiques. Importance de la considération des symétries et des dissymétries* (*Bull. Soc. franç. Électr.*, 5e série, t. IX, juillet 1939, p. 592).

— *Induction magnétoélectrique* (*Bull. Soc. franç. Électr.*, 6e série, t. I, décembre 1941, p. 553).

— *Analogie entre l'électrostatique et le magnétisme et théorie ampérienne de l'électrostatique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 214, 1942, p. 855).

— *Théorie synthétique de l'électrostatique et de la magnétostatique. Théorie ampérienne de l'électrostatique* (*Bull. Soc. franç. Électr.*, 6e série, t. V, août 1945, p. 223).

— *Les tenseurs et l'électricité.* Première Partie. *Les tenseurs à trois variables dans la théorie de l'électricité et du magnétisme.* (A paraître dans le *Bull. Soc. franç. Électr.*).

SUR LE RENDEMENT DE CONVERSION DES TUBES A MODULATION DE VITESSE DU TYPE REFLEX

PAR JEAN BERNIER,

Docteur ès sciences,

Laboratoire de Recherches « Tubes électroniques » de la Compagnie Générale de Télégraphie sans fil.

SOMMAIRE. — *Dans les tubes à modulation de vitesse du type reflex, le champ d'ultra-haute fréquence sert à la fois à la commande du faisceau à l'aller et au prélèvement d'énergie par freinage des électrons au retour. Pour avoir un bon rendement, la « tension » H. F. ne doit être ni trop faible, car alors les électrons ne sont pas suffisamment freinés au retour, ni trop élevée, sans quoi la commande du faisceau à l'aller demanderait trop d'énergie, ou bien encore certains électrons risqueraient d'être réfléchis par le champ H. F. lui-même. Le présent travail est consacré à l'étude quantitative de ce phénomène, sous les hypothèses de charge d'espace négligeable, de trajectoires électroniques rectilignes et de champ H. F. uniforme et bien délimité, quoique de* largeur finie. *On y calcule en particulier le rendement de conversion électronique, soit lorsque tous les électrons sont réfléchis par le miroir et pour différentes largeurs de champ H. F., soit lorsque la moitié des électrons seulement est réfléchie par un miroir mis au potentiel de la cathode, et que le champ H. F. est infiniment étroit.*

INTRODUCTION.

Au sein d'un faisceau électronique qui est réfléchi dans un champ électrique constant après avoir été modulé dans sa vitesse, il se crée un groupement spatial et périodique d'électrons et le faisceau est susceptible d'entretenir des oscillations électromagnétiques dans le même organe oscillant que celui dont le champ H. F. a produit la modulation de vitesse.

Sur la base de ces phénomènes, il est possible de concevoir des générateurs d'ondes ultra-courtes dont la construction et le réglage sont relativement simples puisque ces appareils ne comportent qu'un seul organe oscillant.

Plusieurs types de tubes de cette catégorie — que l'on peut regarder comme des perfectionnements plus ou moins directs des triodes à oscillations spatiales de Barkhausen, Gutton, Pierret, etc. — avaient été développés dès avant la guerre et, pour leur part, les Laboratoires de la Compagnie Générale de Télégraphie sans fil en avaient étudiés, déjà en 1939, plusieurs modèles qui utilisaient comme organe oscillant soit des tronçons de ligne de transmission, soit des volumes résonnants.

Bien que les résultats donnés par ces premiers prototypes fussent très prometteurs (en 1940 nous obtenions quelques dixièmes de watt sur 15 cm de longueur d'onde), leur mise au point fut pratiquement suspendue sous l'occupation allemande parce qu'elle risquait d'être profitable à l'ennemi.

Pour la même raison, seules des informations générales, à propos desquelles la discrétion aurait été illusoire, furent publiées sur la question par les membres de notre Laboratoire; notons, toutefois, que, dans ces données, on peut trouver un examen complet des principaux phénomènes physiques auxquels se rapporte le présent exposé [1]. Celui-ci a pour but de rendre compte des premiers travaux théoriques qui furent poursuivis dans le secret pendant l'occupation; bien qu'ils datent de 1942, la publication de leurs résultats semble présenter encore maintenant un intérêt important parce qu'ils concernent des questions au sujet desquelles, à la connaissance de l'auteur du moins, aucune étude détaillée n'a été communiquée tant en France qu'à l'étranger.

Dans ce qui suit, l'auteur ne prétend pas analyser dans toute sa complexité, le fonctionnement des tubes reflex à modulation de vitesse; il vise seulement,

[1] R. WARNECKE, *Nouveaux tubes électroniques pour ultra-hautes fréquences : les tubes à commande par modulation de vitesse* (*Rev. gén. Électr.*, t. 49, juin 1941, p. 381-409).

en s'aidant d'hypothèses simplificatrices bien déterminées, à faire une analyse précise de certains phénomènes élémentaires. C'est seulement dans des communications ultérieures que les résultats présentés ici seront utilisés, avec d'autres, pour expliquer le comportement de quelques tubes électroniques, dont le klystron reflex, qui est maintenant si répandu après l'usage intensif qui en a été fait, notamment dans la partie réceptrice des « Radar ».

0.1. Principe de fonctionnement des tubes reflex à modulation de vitesse.

Le schéma de principe des tubes à modulation de vitesse reflex est représenté en figure 1. K est la cathode, G_1 et G_2 des grilles constituant une électrode à modulation de vitesse et qui sont portées à un potentiel V_0 positif par rapport au potentiel de la cathode. P est l'électrode de réflexion, à un potentiel V_R négatif par rapport à K. Les grilles G_1 et G_2 sont incorporées à un circuit oscillant généralement constitué par une cavité résonnante : lorsque celui-ci est excité, il existe entre G_1 et G_2 un champ électrique longitudinal d'ultra-haute fréquence, si bien que les électrons issus de K et passant en G_1 avec tous la même vitesse v_0 (correspondant à V_0) parviennent au niveau de G_2 avec des vitesses v_1 dépendant de leur phase d'entrée dans le champ (phénomène de modulation de vitesse). Dans l'espace G_2P, ou espace de rassemblement, les électrons sont soumis à un champ électrostatique longitudinal (champ retardateur) qui les freine et, finalement, les réfléchit si leur vitesse s'annule avant d'atteindre P. Le tube est dit à réflexion totale si tous les électrons sont réfléchis avant d'atteindre P, sinon il est dit à réflexion partielle. On constate que tous les électrons réfléchis retombent en G_2 avec la même vitesse v_1 qu'ils avaient à l'aller, mais la durée de leur séjour dans G_2P dépend de v_1, donc de la phase d'entrée des électrons, ce qui provoque la « mise en paquets » des électrons à la sortie. Ensuite, ceux-ci traversent à nouveau, mais en sens inverse, le champ de haute fréquence G_1G_2, parviennent en G_2 avec une vitesse v_2 différente en général de v_0, puis sont captés par les éléments massifs du tube.

Considérons la variation $\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_0^2)$ de force vive d'un électron : elle représente la quantité totale d'énergie empruntée au champ H. F. par cet électron, puisque sa vitesse à l'aller et au retour en G_2 est la même. La moyenne au cours d'un cycle $\frac{1}{T}\int_0^T \Delta\mathcal{E}\,dt$ est donc, à un facteur près qui dépend de l'intensité supposée constante du faisceau incident, la puissance moyenne cédée par le champ H. F. au faisceau. Si cette puissance est positive, les oscillations du circuit s'amortissent très rapidement, si, au contraire, elle est négative, le faisceau cède de l'énergie au champ et il y a transfert d'énergie entre la source de tension V_0 et le circuit oscillant. Le tube pourra fonctionner en auto-oscillateur si la puissance cédée est supérieure à la puissance perdue par effet Joule dans le circuit oscillant, ce surplus de puissance étant la puissance qui apparaîtra dans le circuit de charge du tube.

On appelle rendement de conversion électronique du tube la valeur du rapport de l'énergie moyenne cédée par le faisceau au champ H. F. à l'énergie prise par le faisceau à la source V_0. Son expression est

$$\eta = -\frac{\frac{1}{T}\int_0^T \Delta\mathcal{E}\,dt}{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}mv_0^2\,dt},$$

$\Delta\mathcal{E}$ étant égal à $\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_0^2)$ pour les électrons réfléchis et à $\frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2)$ pour les électrons captés par l'électrode P. En particulier, pour les tubes à réflexion totale, le rendement de conversion peut s'écrire

$$\eta = -\frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{v_2^2}{v_0^2} - 1\right] dt.$$

0.2. Objet de l'étude et hypothèses.

L'objet du présent travail est le calcul du rendement de conversion des tubes reflex, l'examen de l'incidence de certains paramètres sur sa valeur et, en particulier, pour les tubes à réflexion totale, l'influence de la largeur du champ H. F.

Pour simplifier l'analyse mathématique des phénomènes, nous avons été amené à faire certaines hypothèses, qui sont d'ailleurs celles généralement faites dans ce genre de problèmes. Ainsi, nous supposons que les effets de la charge d'espace sont négligeables et qu'il n'y a pas d'émission secondaire des électrodes. Nous supposons également que le faisceau incident est de densité et de vitesse uniformes, que les électrodes G_1 et G_2 sont des plans perpendiculaires à l'axe du faisceau, à la fois parfaitement perméables aux électrons et délimitant rigoureusement le champ H. F., que le champ électrostatique dans l'espace G_2P est celui d'un condensateur plan et, qu'enfin, les électrons ont des trajectoires rectilignes et parallèles. La validité et les conséquences

de certaines de ces hypothèses ont déjà été discutées à propos des tubes à conversion par glissement [1].

Nous examinerons d'ailleurs ultérieurement comment doivent être modifiés les résultats de la présente étude lorsque l'on serre de plus près la réalité des phénomènes physiques.

0.3. Notations.

V_0, tension d'accélération des électrons;
V_R, tension de l'électrode réfléchissante P;
$U \sin \omega t$, tension haute fréquence entre G_1 et G_2;
h, distance G_1G_2;
l, distance G_2P;
$v_0 = \left(\frac{2e}{mV_0}\right)^{\frac{1}{2}}$ vitesse des électrons en G_1 à l'aller;
v_1, vitesse des électrons en G_2;
v_2, vitesse des électrons en G_1 au retour;
η, rendement de conversion;
η_0, rendement de conversion dans le cas limite où $h \to 0$.

Pour la commodité des calculs, nous introduirons, en outre, les nombres sans dimensions suivants :

$$\mu = \frac{eU}{mv_0^2} = \frac{1}{2}\frac{U}{V_0}, \qquad K = \frac{V_0 - V_R}{V_0},$$

$\theta = \frac{\omega h}{v_0}$, $\delta = \frac{\omega l}{v_0}$ (distances G_1G_2 et G_2P exprimées en radians);
$\lambda = \frac{\delta}{K}$, nombre caractérisant l'espace G_2P;
$\varphi = \omega t_0$, phase d'entrée des électrons dans l'espace G_1G_2 à l'aller;
ψ, phase d'entrée des électrons dans l'espace G_1G_2 au retour;
τ, angle de transit des électrons entre G_1 et G_2 à l'aller;
σ, angle de transit des électrons entre G_1 et G_2 au retour.

Dans les modèles courants de tubes μ est de l'ordre de $\frac{2}{10}$, θ de l'ordre $\frac{3\pi}{4}$ et λ de l'ordre de $\frac{7\pi}{2}$.

1. — Mouvement des électrons dans un tube a champ retardateur. Variation d'énergie cinétique et rendement de conversion.

1.1. Dans l'espace G_1G_2 (*fig.* 1), le champ électrique est égal à $\frac{U}{h}\sin\omega t$ et le mouvement des électrons est défini par

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e}{m}\frac{U}{h}\sin\omega t,$$

d'où

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{e}{m}\dfrac{U}{h}\dfrac{1}{\omega}[\cos\omega t - \cos\omega t_0] + v_0, \\ x = -\dfrac{e}{m}\dfrac{U}{h}\dfrac{1}{\omega^2}\sin\omega t + \left[v_0 + \dfrac{eU}{mh}\dfrac{1}{\omega}\cos\omega t_0\right](t - t_0) \\ \qquad + \dfrac{e}{m}\dfrac{U}{h}\dfrac{1}{\omega^2}\sin\omega t_0. \end{cases}$$

Dans ces équations, e est la valeur absolue de la charge de l'électron, m sa masse, t_0 et v_0 son époque de passage et sa vitesse en G_1. L'époque t_1 d'arrivée de l'électron en G_2 est la solution de la dernière équation (considérée comme équation en t) où l'on aurait remplacé x par h.

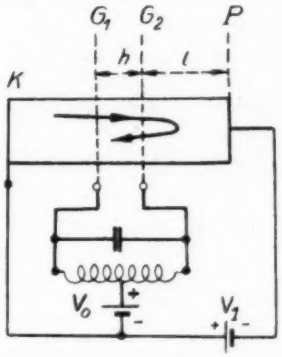


Fig. 1. — Schéma de principe d'un tube à modulation de vitesse du type reflex.

Introduisons les nombres sans dimensions

$$\mu = \frac{1}{2}\frac{U}{V_0}, \qquad \theta = \frac{\omega h}{v_0}, \qquad \varphi = \omega t_0, \qquad \tau = \omega(t_1 - t_0).$$

L'angle de transit τ est la solution de l'équation

$$(2)\quad \tau + \frac{\mu}{\theta}[\cos\varphi(\tau - \sin\tau) + \sin\varphi(1 - \cos\tau)] = 0,$$

et la vitesse v_1 des électrons au niveau de la grille G_2 est donnée par

$$(3)\quad \frac{v_1}{v_0} = 1 - \mu\left[\frac{\cos(\varphi + \tau) - \cos\varphi}{\theta}\right].$$

Dans l'espace G_2P le champ électrique est constant et égal à $(V_0 - V_R)/l$; par suite, le mouvement des électrons est uniformément varié et est régi par les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{e}{m}\frac{V_0 - V_R}{l},$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{e}{m}\frac{V_0 - V_R}{l}(t - t_1) + v_1,$$

$$x = -\frac{1}{2}\frac{e}{m}\frac{V_0 - V_R}{l}(t - t_1)^2 + v_1(t - t_1).$$

[1] R. Warnecke et J. Bernier, *Contribution à la théorie des tubes à commande par modulation de vitesse et autres tubes à temps de transit* (*Rev. gén. Électr.*, t. 51, janvier 1942, p. 43-58, et t. 51, février 1942, p. 117-139; *Erratum* dans *Rev. gén. Électr.*, t. 52, octobre 1943, p. 320).

Le point extrême atteint par un électron passant en G_1 à l'époque t_0 est tel que $\frac{dx}{dt} = 0$: on trouve aisément qu'il a pour abscisse

$$x_{max} = \frac{\frac{1}{2} m v_1^2}{e(V_0 - V_R)} l.$$

Les électrons pour lesquels $x_{max} \geq l$ sont captés par l'électrode P; par contre, si x_{max} est inférieur à l quel que soit t_0, tous les électrons sont réfléchis.

Avec les nombres sans dimensions

$$\delta = \frac{\omega l}{v_0}, \qquad K = \frac{V_0 - V_R}{V_0}, \qquad \lambda = \frac{4\delta}{K},$$

la condition de réflexion totale $\left(\frac{\omega x}{v_0}\right)_{max} < \delta$ devient $K > \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2$, ou encore, d'après (3),

$$(5) \qquad K > \left[1 - \mu \frac{\cos(\varphi + \tau) - \cos\varphi}{\theta}\right]^2$$

quel que soit φ.

Pour être satisfaite, cette condition demande que *le miroir* P *soit à un potentiel* V_R *négatif par rapport à la cathode.* En particulier lorsque $\theta \to 0$, c'est-à-dire lorsque la distance G_1G_2 devient infiniment petite, le rapport $\frac{v_1}{v_0}$ (ainsi que nous le montrerons au paragraphe 2.3) est égal à $\sqrt{1 + 2\mu \sin\varphi}$ et la condition de réflexion totale est $K > 1 + 2\mu$, soit $-V_R > U$; par contre, si $V_R = 0$, tous les électrons passant en G_1 à une phase φ comprise entre 0 et π sont captés par P, et seuls sont réfléchis ceux qui entrent à une phase telle que $\pi < \varphi < 2\pi$ (1).

Considérons maintenant les électrons à leur retour : une fois réfléchis, ils repassent en G_2 avec la phase $\psi = \omega t$ donnée par la troisième des équations (4) où l'on aurait fait $x = 0$, soit, avec les notations déjà indiquées,

$$(6) \qquad \psi = \varphi + \tau + \lambda\left(\frac{v_1}{v_0}\right).$$

Leur vitesse est, d'après (4),

$$\frac{1}{v_0}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{G_2} = \frac{v_1}{v_0} - \frac{K}{2\delta} \times \frac{4\delta}{K}\frac{v_1}{v_0} = -\frac{v_1}{v_0}.$$

On voit qu'elle est égale, en valeur absolue, à la vitesse v_1 qu'avaient les électrons à leur passage en G_2 à l'aller. Par conséquent, la variation d'énergie cinétique des électrons réfléchis est nulle et ils ne cèdent, au total, aucune énergie avec l'extérieur durant leur séjour dans l'espace G_2P.

Pour la traversée du champ G_1G_2 au retour, les équations du mouvement sont analogues à celles valables pour l'aller, mais les électrons traversant G_1G_2 en sens inverse, la force agissant dessus à l'instant t est $-\frac{e}{m}\frac{U}{h}\sin\omega t$ et, par suite, on devra remplacer, dans les équations (1), φ par $\psi + \tau$ et v_0 par v_1. Il s'ensuit que l'angle de transit σ est donné par l'équation

$$(7) \qquad \frac{v_1}{v_0}\sigma - \frac{\mu}{\theta}[\cos\psi(\sigma - \sin\sigma) + \sin\psi(1 - \cos\sigma)] = \theta,$$

et que la vitesse v_2 de sortie a pour expression

$$\frac{v_2}{v_0} = \frac{v_1}{v_0} + \mu\frac{\cos(\psi + \sigma) - \cos\psi}{\theta}$$

ou, d'après (3),

$$(8) \qquad \frac{v_2}{v_0} = 1 + \frac{\mu}{\theta}[\cos(\psi + \sigma) - \cos\psi - \cos(\varphi + \tau) + \cos\varphi].$$

1.2. Variation d'énergie cinétique d'un électron et rendement de conversion.

La variation d'énergie cinétique d'un électron durant son trajet G_1PG_1 est uniquement due à l'action du champ de haute fréquence G_1G_2. C'est une fonction de φ, μ et θ et a pour expression

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_0^2).$$

Dans ce qui suit, nous considérerons la quantité sans dimension

$$T = \frac{v_2^2}{v_0^2} - 1,$$

d'où

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v_0^2 T = eV_0 T.$$

Posons

$$(9) \qquad f(\varphi, \mu, \theta) \equiv \cos(\psi + \sigma) - \cos\psi - \cos(\varphi + \tau) + \cos\varphi,$$

alors

$$\frac{v_2}{v_0} = 1 + \frac{\mu}{\theta} f$$

et

$$T = \frac{2\mu}{\theta} f + \frac{\mu^2}{\theta^2} f^2.$$

Le rendement de conversion η est, ainsi qu'il a été défini précédemment, la moyenne au cours du temps du rapport entre l'énergie cédée par le faisceau au champ G_1G_2 et l'énergie prise par le faisceau à la source de tension V_0, soit

$$\eta = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Delta\mathcal{E}}{eV_0} d\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T\, d\varphi.$$

(1) Cette remarque montrant la possibilité d'un découpage du faisceau et, par suite, une augmentation éventuelle de rendement du tube par un groupement amélioré des électrons, est à l'origine des développements du paragraphe 4.

Deux cas sont alors à considérer :

a. La réflexion du faisceau est totale (*voir* condition 5) : alors le rendement de conversion η, qui est une fonction de μ, de θ et de λ s'exprime par

$$(10)\quad \eta(\mu, \theta, \lambda) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{2\mu}{\theta}f(\varphi) + \frac{\mu^2}{\theta^2}f^2(\varphi)\right]d\varphi.$$

b. La réflexion du faisceau est partielle : Supposons, par exemple, que les électrons captés par le miroir P soient ceux passant à l'aller en G_1 entre les phases φ_1 et φ_2 (telles que $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$). Dans le bilan d'énergie, il faut tenir compte de l'énergie prise par ces électrons au champ G_1G_2 à l'aller. Par suite la formule précédente du rendement reste valable, à condition de considérer $\cos(\psi + \sigma) - \cos\psi$ comme nul dans l'intervalle $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$.

2. — Rendement de conversion d'un tube a réflexion totale lorsque le champ H. F. est infiniment étroit.

Nous commencerons par calculer le rendement de conversion d'un tube à réflexion totale dont la distance G_1G_2 des grilles serait infiniment petite ($\theta = 0$). Un tel tube n'a pas de réalité physique puisque aucun circuit oscillant branché entre G_1 et G_2 ne peut présenter une impédance suffisante pour qu'une « tension » H. F. notable soit excitée. Mais ce cas idéal est, néanmoins, fondamental parce que l'étude mathématique peut en être faite complètement d'une manière rigoureuse et que l'aspect du phénomène reste sensiblement le même lorsque θ est petit. On peut même déduire, comme nous le verrons au paragraphe 3, le rendement pour θ quelconque de l'expression du rendement pour $\theta = 0$.

L'hypothèse $\theta = 0$ est celle que l'on fait ordinairement dans la théorie élémentaire des tubes à modulation de vitesse et à conversion par glissement. Les calculs sont alors simples parce qu'on fait, en outre, l'hypothèse que la « tension » H. F. du rassembleur est suffisamment faible pour que la modulation de vitesse soit sinusoïdale. Ici, une telle hypothèse n'est pas admissible, puisque le champ H. F. joue à la fois le rôle de champ de commande et de champ de prélèvement et qu'un prélèvement important d'énergie au faisceau suppose une « tension » H. F. qui soit une fraction importante de la tension d'accélération des électrons. A ce point de vue, le tube reflex s'apparente plutôt au tube à glissement et à grand signal de commande et la méthode que nous emploierons ici peut donc s'appliquer à ceux-ci.

2.1. Expression du rendement η_0.

Puisque nous supposons une « tension » H. F. finie entre des grilles infiniment rapprochées, le champ et la force agissant sur les électrons sont infiniment grands : de ce fait, les formules doivent être établies avec certaines précautions.

Nous appellerons rendement η_0, pour $\theta = 0$, la limite du rendement $\eta(\theta, \mu, \lambda)$ lorsque θ tend vers zéro, soit, d'après (10),

$$(11)\quad \eta_0(\mu, \lambda) = \lim_{\theta=0}\left[-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{2\mu}{\theta}f + \frac{\mu^2 f^2}{\theta^2}\right)d\varphi\right].$$

Or, f est une fonction continue de τ, de σ et de ψ, donc de θ, qui tend vers zéro avec θ; par suite,

$$\lim_{\theta=0}\frac{f}{\theta} = \left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)_0.$$

L'élément différentiel est continu par rapport à θ et, par conséquent, la limite de l'intégrale est égale à l'intégrale de la limite de l'élément différentiel, d'où

$$(12)\quad \eta_0 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[2\mu\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)_0 + \mu^2\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)_0^2\right]d\varphi.$$

En dérivant l'expression de f par rapport à θ et en passant à la limite, on trouve

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)_0 = -\left[\sin\psi_0\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\right)_0 - \sin\varphi\left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)_0\right],$$

où ψ_0 est la limite de ψ lorsque $\theta \to 0$. Or, en se reportant aux expressions générales (3) et (6) de $\frac{v_1}{v_0}$ et de ψ, il est facile de voir que

$$\lim_{\theta=0}\left(\frac{v_1}{v_0}\right) = 1 + \mu\sin\varphi\left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)_0$$

et

$$\psi_0 = \varphi + \lambda + \mu\lambda\sin\varphi\left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)_0.$$

On calculera $\left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)_0$ en dérivant par rapport à θ l'équation implicite (2) donnant l'angle de transit τ. En remarquant que $\tau \sim \theta\left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)_0$ et en passant à la limite, on obtient

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)_0\left[1 + \mu\sin\varphi\left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)_0\right] - \frac{\mu}{2}\sin\varphi\left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)_0 = 1.$$

La valeur cherchée de $\left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)_0$ est celle des deux racines de cette équation qui tend vers une limite

finie lorsque $\mu \to 0$ $\left[\text{en effet, si } \mu = 0,\ \tau = \theta \text{ et } \left(\frac{\partial \tau}{\partial \theta}\right)_0 = 1\right]$, d'où

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial \theta}\right)_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2\mu \sin \varphi}}{\mu \sin \varphi}.$$

On en déduit que

$$\lim_{\theta = 0} \frac{v_1}{v_0} = \sqrt{1 + 2\mu \sin \varphi} \qquad (^1) \tag{13}$$

et que

$$\psi_0 = \varphi + \lambda \sqrt{1 + 2\mu \sin \varphi} \qquad (^2). \tag{14}$$

Le calcul de $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}\right)_0$ se fait d'une manière analogue à celle de $\left(\frac{\partial \tau}{\partial \theta}\right)_0$, mais à partir de l'équation implicite (7).

On obtient l'équation du deuxième degré

$$\frac{\mu}{2} \sin \psi_0 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}\right)_0^2 - \sqrt{1 + 2\mu \sin \varphi} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}\right)_0 + 1 = 0$$

dont on ne doit considérer que la racine qui garde une valeur finie lorsque θ tend vers zéro, soit

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}\right)_0 = \sqrt{1 + 2\mu \sin \varphi} - \sqrt{1 + 2\mu \sin \varphi - 2\mu \sin \psi_0}.$$

On a ainsi les éléments pour calculer $\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_0$ et η_0. Ainsi,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_0 = \frac{1}{\mu}\left[\sqrt{1 + 2\mu \sin \varphi - 2\mu \sin \psi_0} - 1\right]$$

et

$$\eta_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big[2\left(\sqrt{1 + 2\mu \sin \varphi - 2\mu \sin \psi_0} - 1\right) + \left(\sqrt{1 + 2\mu \sin \varphi - 2\mu \sin \psi_0} - 1\right)^2 \Big] d\varphi$$

ou encore

$$\eta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2\mu \sin \psi_0 - 2\mu \sin \varphi)\, d\varphi.$$

Comme

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi\, d\varphi = 0,$$

on obtient finalement, pour η_0, l'expression suivante :

$$\eta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\mu \sin \psi_0\, d\varphi \tag{15}$$

avec

$$\psi_0 = \varphi + \lambda \sqrt{1 + 2\mu \sin \varphi}.$$

2.2. Calcul de η_0 (1).

On développe le radical en série de Fourier, mais, au préalable, on change la variable d'intégration φ en $\frac{\pi}{2} - \varphi$, d'où

$$\eta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\mu \cos\left(\varphi - \lambda \sqrt{1 + 2\mu \cos \varphi}\right) d\varphi.$$

Le radical est alors une fonction paire qui a pour développement en série de Fourier (Annexe I) :

$$\sqrt{1 + 2\mu \cos \varphi} = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \ldots + a_n \cos n\varphi + \ldots,$$

a_n est de l'ordre de μ^n, en particulier $a_4 = -\frac{5}{64}\mu^4$. Comme la condition de non-réflexion des électrons par le champ H. F. impose, comme nous le verrons ci-après, que μ soit au plus égal à 0,36, le coefficient a_4 est au plus égal à $1{,}3.10^{-4}$ et est, par suite, négligeable. On peut donc écrire

$$\sqrt{1 + 2\mu \cos \varphi} = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + a_3 \cos 3\varphi,$$

les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 ayant pour valeurs

$$a_0 = 1 - \frac{\mu^2}{4} - \frac{15}{64}\mu^4, \qquad a_1 = \mu + \frac{3}{8}\mu^3,$$

$$a_2 = -\frac{\mu^2}{4} - \frac{5}{16}\mu^4, \qquad a_3 = \frac{\mu^3}{8}.$$

Le calcul du rendement se ramène ainsi à celui de l'intégrale, prise entre 0 et 2π, de

$$\cos[\varphi - a_0\lambda - a_1\lambda \cos \varphi - a_2\lambda \cos 2\varphi - a_3\lambda \cos 3\varphi].$$

Le résultat s'exprime à l'aide des fonctions de Bessel (Annexe II) et l'on trouve finalement que

$$\eta_0(\mu, \lambda) = -2\mu\left[\frac{K_1 + K_2}{2} \cos a_0\lambda + \frac{K_3 + K_4}{2} \sin a_0\lambda\right]$$

avec

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{K_1}{2} &= J_0(a_3\lambda)\Big\{ J_2(-a_2\lambda)[J_5(a_1\lambda) - J_7(a_1\lambda)] \\
&\qquad - J_1(-a_2\lambda)[J_4(a_1\lambda) - J_6(a_1\lambda)]\Big\}, \\
\frac{K_2}{2} &= -J_1(a_3\lambda) J_1(-a_2\lambda)\big[J_0(a_1\lambda) - J_2(a_1\lambda) \\
&\qquad + J_4(a_1\lambda) - J_6(a_1\lambda)\big], \\
\frac{K_3}{2} &= J_0(a_3\lambda)\Big\{ J_0(-a_2\lambda)\, J_1(a_1\lambda) \\
&\qquad + J_2(-a_2\lambda)[J_3(a_1\lambda) - J_5(a_1\lambda)]\Big\}, \\
\frac{K_4}{2} &= J_1(a_3\lambda) J_0(-a_2\lambda)[J_0(a_1\lambda) - J_2(a_1\lambda)].
\end{aligned}\right. \tag{16}$$

(1) Cette relation signifie que lorsque $\theta \to 0$, c'est-à-dire lorsqu'on rapproche indéfiniment G_2 de G_1, la vitesse des électrons (exprimée en électrons-volts) au niveau de G_2 tend vers $V_0 + U \sin \omega t$; il y a, par conséquent, discontinuité des vitesses et les électrons subissent une percussion (au sens de la mécanique) due au champ électrique infini entre G_1 et G_2.

(2) Dans les tubes à modulation de vitesse à rassemblement électronique par glissement, la phase d'entrée des électrons dans le collecteur est, au contraire, $\psi_0 = \varphi + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + 2\mu \sin \varphi}}$. Il n'y a, par suite, analogie dans les résultats que si μ est très petit.

(1) Se reporter aux Annexes I et II pour le détail des développements mathématiques.

Cette formule permet de calculer η_0 avec 3 décimales lorsque $\lambda < 100$ radians (ou 33π) et que μ est tel qu'il n'y ait pas réflexion d'électrons par le champ de haute fréquence.

2.3. Condition de non-réflexion des électrons par le champ de haute fréquence.

Les résultats ci-dessus ne sont valables que si tous les électrons traversent directement l'espace G_1G_2 sans qu'aucun d'entre eux ne soit réfléchi par le champ H. F. Il a été déjà montré par ailleurs [1], et pour un problème analogue d'échange d'énergie entre un faisceau modulé en densité et un champ H. F., que le rendement de conversion baisse très rapidement sitôt qu'il y a oscillation des électrons dans le champ H. F. ou réflexion partielle du faisceau par celui-ci.

La condition de non-réflexion par le champ H. F. s'obtient en écrivant que les solutions des équations (2) et (7) donnant les angles de transit τ et σ sont réelles (et positives) quel que soit φ. Dans notre cas particulier, où $\theta \to 0$ et où $\tau \sim \theta \left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)_0$ et $\sigma \sim \theta \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\right)_0$, nous devrons écrire que $\left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\right)_0$ sont réels et positifs quel que soit φ, ce qui n'a lieu que si l'on a simultanément

$$1 + 2\mu \sin\varphi \geqq 0,$$

$$1 + 2\mu \sin\varphi - 2\mu \sin\left(\varphi + \lambda\sqrt{1 + 2\mu \sin\varphi}\right) \geqq 0.$$

La première de ces relations impose $1 - 2\mu \geqq 0$ ou $\mu \leqq \frac{1}{2}$. La deuxième est certainement vérifiée si $1 - 4\mu \geqq 0$ ou $\mu \leqq \frac{1}{4}$. Mais, d'une façon plus précise, à toute valeur de λ correspond un nombre μ_0 $\left(\text{compris entre } \frac{1}{4} \text{ et } \frac{1}{2}\right)$ tel que pour $\mu \leqq \mu_0$ les relations ci-dessus soient vérifiées quel que soit φ, tandis que pour $\mu > \mu_0$, ces inégalités ne sont pas vérifiées. Ainsi, *le maximum U_0 de l'amplitude de la « tension » H. F. permise est compris entre $\frac{V_0}{2}$ et V_0, et elle dépend de l'angle de transit moyen des électrons dans le champ retardateur.*

La recherche de μ_0 a été faite graphiquement et les résultats sont traduits par la courbe représentée en figure 2 qui donne μ_0 en fonction de λ. On constate que la courbe oscille tout en s'amortissant et que, lorsque λ est plus grand que π, la valeur maximum de μ_0 est 0,36, valeur qui est atteinte pour $\lambda = 3\pi$.

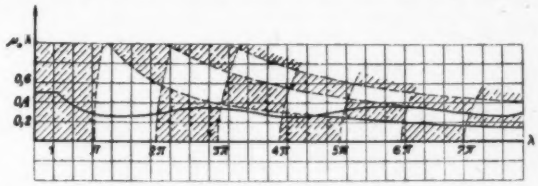


Fig. 2. — Étude qualitative des tubes à réflexion totale ($\theta = 0$). Régions du plan (μ, λ) où le rendement est positif, et condition de non-réflexion des électrons par le champ H. F.

2.4. Étude qualitative de $\eta_0(\mu, \lambda)$.

Pour une étude qualitative, on peut simplifier l'expression (16) de η_0 en remarquant que, pour de petites valeurs de l'argument, $J_n(x) \sim \frac{x^n}{2^n n!}$, et que, par suite,

$$\frac{K_1}{2} \sim -J_1(-a_2\lambda)\, J_1(a_1\lambda), \qquad K_2 \sim 0,$$

$$\frac{K_3}{2} \sim J_1(a_1\lambda), \qquad K_4 \sim 0,$$

avec

$$a_0 \sim 1 - \frac{\mu^2}{4}, \qquad a_1 \sim \mu, \qquad a_2 \sim -\frac{\mu^2}{4}.$$

Ainsi le rendement devient

$$(17) \qquad \eta_0 \sim 2\mu J_1(\mu\lambda)\left[J_1\left(\frac{\mu^2\lambda}{4}\right)\cos\left(1 - \frac{\mu^2}{4}\right)\lambda - \sin\left(1 - \frac{\mu^2}{4}\right)\lambda\right].$$

Les régions du plan (λ, μ) où η_0 est positif sont limitées par des courbes de rendement nul. Ces courbes forment deux familles : celle pour laquelle

$$J_1(\mu\lambda) = 0$$

et celle pour laquelle

$$\operatorname{tg}\left(1 - \frac{\mu^2}{4}\right)\lambda = J_1\left(\frac{\mu^2}{4}\lambda\right).$$

Les zéros de $J_1(x)$ étant $x = 3{,}83$, $x = 7{,}01$, $x = 10{,}2$, ..., la première famille de courbes se compose d'hyperboles d'équations

$$\mu = \frac{3{,}83}{\lambda}, \qquad \mu = \frac{7{,}01}{\lambda}, \qquad \mu = \frac{10{,}2}{\lambda}, \qquad \ldots.$$

Quant à la deuxième famille, remarquons que $\frac{\mu^2}{4}\lambda$ étant petit, $J_1\left(\frac{\mu^2}{4}\lambda\right)$ est voisin de zéro et, par suite, que $\left(1 - \frac{\mu^2}{4}\right)\lambda$ est voisin de $n\pi$ où n est un nombre

[1] R. Warnecke et J. Bernier, *op. cit.*

entier positif. En se bornant au premier terme des développements en série des deux membres de l'équation de la deuxième famille de courbes, on obtient

$$\left(1-\frac{\mu^2}{4}\right)(\lambda - n\pi) = \frac{\mu^2\lambda}{8},$$

ou encore

$$\lambda = n\pi\left(1+\frac{\mu^2}{8}\right).$$

Cette deuxième famille de courbes est donc composée de paraboles admettant l'axe des λ comme axe de symétrie et dont les sommets ont pour abscisse $\lambda = n\pi$.

Ces paraboles et les hyperboles précédentes forment dans le plan (λ, μ) un quadrillage (*fig.* 2) tel qu'à l'intérieur de chacun des carreaux le rendement reste soit positif, soit négatif. Sur la figure 2, les carreaux pour lesquels η_0 est négatif ont été hachurés, mais seules les régions non hachurées situées en dessous de la courbe de non-réflexion présentent un intérêt. En particulier, lorsque μ est très petit, le tube ne peut osciller que si λ est compris entre $(2n-1)\pi$ et $2n\pi$. Nous appellerons *ordre de l'oscillation* le nombre entier n, qui caractérise chacune des zones où le tube peut accrocher.

Dans chacun des carreaux non hachurés de la figure 2, le rendement présente un maximum absolu qui a lieu lorsque $\frac{\partial\eta}{\partial\lambda} = \frac{\partial\eta}{\partial\mu} = 0$. Or, $\frac{\partial\eta}{\partial\lambda}$ est nul pour des valeurs de μ et de λ telles que $\sin\left(1-\frac{\mu^2}{4}\right)\lambda$ soit voisin de -1. Par le même procédé que précédemment, on trouve que ces maxima sont situés sur les paraboles

$$\lambda = \left(2n\pi \mp \frac{\pi}{2}\right)\left(1+\frac{\mu^2}{8}\right).$$

Sur ces courbes, η_0 a pour valeur un nombre voisin de

$$2\mu J_1(\mu\lambda)$$

qui est maximum lorsque

$$J_0(\mu\lambda) = 0 \quad (^1).$$

Les zéros de $J_0(x)$ étant 2,40, 5,52, ... [auxquels correspondent respectivement les valeurs 0,52, —0,34 de $J_1(x)$], les maxima absolus de η_0, qui sont tels que

$$\mu = \frac{2,40}{\lambda}, \qquad \mu = \frac{5,52}{\lambda}, \qquad \ldots,$$

ont pour valeur

$$(\eta_0)_{\max} = \frac{2\times 2,40\times 0,52}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} = \frac{0,4}{n-\frac{1}{4}},$$

$$(\eta_0)_{\max} = \frac{2\times 5,52\times 0,34}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{0,6}{n+\frac{1}{4}},$$

.....

On voit ainsi que le rendement maximum varie en raison inverse de l'ordre d'oscillation.

2.5. Courbes représentatives du rendement.

En fait, la forme exacte des régions d'oscillation possible du tube reflex diffère quelque peu de celle donnée par l'analyse qualitative précédente, ainsi qu'on peut le voir sur la figure 3 *b*. Celle-ci représente, en effet, la projection horizontale de la surface $\eta_0(\lambda, \mu)$: elle donne, sous forme de lignes de niveau, les courbes d'équirendement de 5 en 5 %. On a représenté également (*fig.* 3 *a*) le contour apparent frontal de la surface $\eta_0(\lambda, \mu)$, c'est-à-dire les variations du maximum de rendement avec λ et dans chacun des ordres d'oscillation. Ces différentes courbes ont été calculées par points avec la formule rigoureuse (16) et pour des valeurs de λ comprises entre 0 et 8π.

On a déduit de ces courbes les valeurs, figurant dans le tableau I, des maxima absolus de rendement pour chacun des ordres d'oscillation. On constate que les deux premiers régimes ont des rendements maxima à peu près égaux (25 et 24 %), mais que le deuxième est le plus intéressant parce qu'il correspond à une tension H. F. plus faible ($U = 0,34\,V_0$ contre $U = 0,5\,V_0$).

D'une manière générale, les maxima de rendement baissent lorsque l'ordre d'oscillation croît, mais ils sont atteints, par contre, pour une « tension » H. F. plus faible. Ainsi, contrairement à ce qui se produit dans les tubes à conversion par glissement, les rendements maxima ne sont pas obtenus (sauf pour le premier ordre) avec la « tension » H. F. limite compatible avec la non-réflexion des électrons par le champ.

TABLEAU I.

Ordre d'oscillation.	$\eta_{0\max}$ (%).	λ radians.	$\mu = \frac{1}{2}\frac{U}{V_0}$.
1.....	25	5	0,25 (*)
2.....	24	11,25	0,17
3.....	16	17,4	0,15
4.....	15	23,9	0,13

(*) Rendement limité par la condition de non-réflexion.

(1) On a, en effet,

$$\frac{d}{dx}[x J_1(x)] = J_0(x).$$

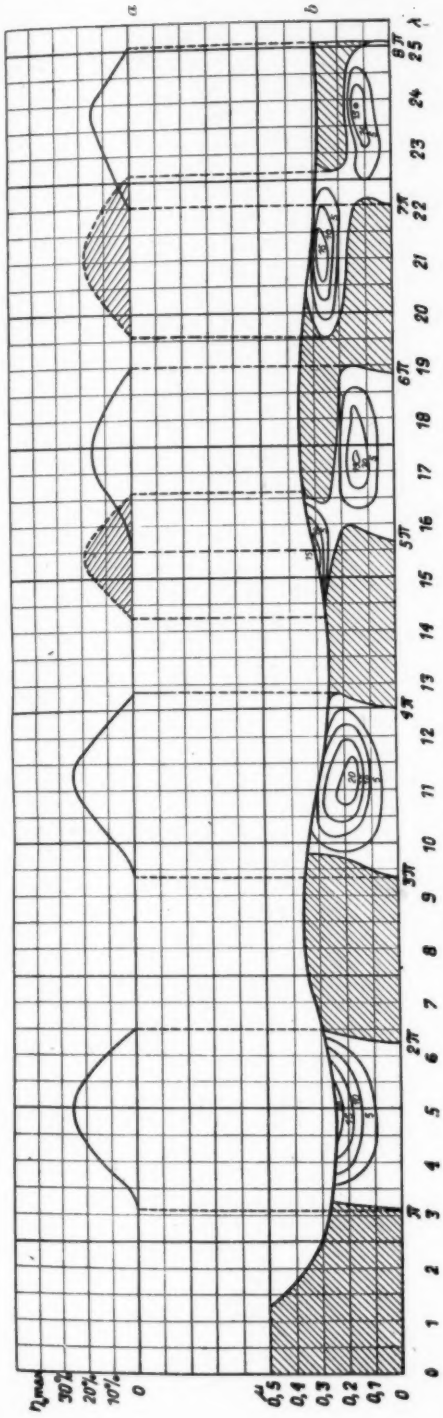


Fig. 3. — T. M. V. à réflexion totale : rendement de conversion pour $\theta = 0$.

a. — Variation de $(\eta_0)_{max}$ avec λ. *b.* — Courbes d'équirendement en fonction de λ et de μ (courbes cotées de 5 en 5 %).

D'autres maxima apparaissent sur la figure 3, tels que $\eta = 19$ % pour $\lambda = 15{,}5$ radians, $\mu = 0{,}3$, et $\eta = 18$ % pour $\lambda = 21$ radians, $\mu = 0{,}26$, mais ceux-ci correspondent à des régimes qui paraissent difficilement accessibles dans les conditions normales. Tous ces résultats sont conformes à ceux prévus par l'analyse qualitative simplifiée qui avait été faite au paragraphe précédent.

3. — Rendement de conversion d'un tube a réflexion totale lorsque la distance G_1G_2 est quelconque.

Dans la pratique, l'écartement des grilles G_1 et G_2 d'un tube reflex, ainsi que nous l'avons déjà signalé, doit être tel que la tension H. F. induite par le faisceau soit suffisante pour produire un bon rendement de conversion. Ainsi, généralement, θ doit être de l'ordre de grandeur de π. Mais l'analyse rigoureuse des phénomènes à temps de transit important dans les champs H. F. présente de grandes difficultés mathématiques : nous nous bornerons ici à établir un développement en série limité, mais exact, de l'expression du rendement jusqu'aux termes en μ^4 (en négligeant, néanmoins, les termes de l'ordre, ou inférieurs à $\mu^4\lambda$), puis nous comparerons ce résultat avec celui, également exact, trouvé pour $\theta = 0$. Ceci nous permettra d'induire une formule approchée du rendement, valable avec une très bonne approximation pour θ et μ quelconques.

3.1. Calcul du rendement $\eta(\mu, \lambda, \theta)$.

Partant de l'expression générale du rendement

$$\eta(\mu, \lambda, \theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{2\mu}{\theta}f(\varphi) + \frac{\mu^2}{\theta^2}f^2(\varphi)\right]d\varphi$$

avec

$$f(\varphi\,;\,\mu, \theta) \equiv \cos(\psi + \sigma) - \cos\psi - \cos(\varphi + \tau) + \cos\varphi,$$

on obtient les coefficients de son développement en série de Mac Laurin :

$$(18)\quad \eta = \mu\left(\frac{\partial\eta}{\partial\mu}\right)_0 + \frac{\mu^2}{2}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\mu^2}\right)_0 + \frac{\mu^3}{6}\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial\mu^3}\right)_0 + \frac{\mu^4}{24}\left(\frac{\partial^4\eta}{\partial\mu^4}\right)_0 + \ldots,$$

en prenant l'intégrale des dérivées partielles successives par rapport à μ de l'élément différentiel,

dérivées prises pour la valeur $\mu = 0$. On obtient ainsi

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\eta}{\partial\mu}\right)_0 &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{2f}{\theta}\right)_{\mu=0} d\varphi,\\
\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\mu^2}\right)_0 &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[2\left(\frac{f}{\theta}\right)^2 + \frac{4}{\theta}\frac{\partial f}{\partial\mu}\right]_{\mu=0} d\varphi,\\
\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial\mu^3}\right)_0 &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{6}{\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2} + \frac{12}{\theta^2} f\frac{\partial f}{\partial\mu}\right]_{\mu=0} d\varphi,\\
\left(\frac{\partial^4\eta}{\partial\mu^4}\right)_0 &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{8}{\theta}\frac{\partial^3 f}{\partial\mu^2} + \frac{24}{\theta^2}\left(f\frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2}\right)\right.\\
&\qquad \left. + \frac{24}{\theta^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\mu}\right)^2\right]_{\mu=0} d\varphi.
\end{aligned}\right.$$

Lorsque μ tend vers zéro, les quantités τ, σ et ψ figurant dans f tendent respectivement vers θ, θ et $\theta + \varphi + \lambda$, d'où

$$[f]_{\mu=0} = \cos(\varphi + \lambda + 2\theta) - \cos(\varphi + \lambda + \theta) - \cos(\varphi + \theta) + \cos\varphi$$

et, par suite, d'après (19),

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial\mu}\right)_0 = 0.$$

Pour calculer $\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\mu^2}\right)_0$ on a besoin de $\left(\frac{\partial f}{\partial\mu}\right)_0$. Or, en dérivant (9) et en faisant tendre μ vers zéro, on obtient

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\mu}\right)_0 = -\left\{ [\sin(\varphi+\lambda+2\theta) - \sin(\varphi+\lambda+\theta)]\left(\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right)_0 + \sin(\varphi+\lambda+2\theta)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\right)_0 - \sin(\varphi+\theta)\left(\frac{\partial\tau}{\partial\mu}\right)_0\right\}.$$

Les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right)_0$, $\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\right)_0$, $\left(\frac{\partial\tau}{\partial\mu}\right)_0$ s'obtiennent en dérivant les équations (2) et (6), puis, en faisant tendre μ vers zéro, d'où

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right)_0 &= \left[\lambda\frac{\sin\theta}{\theta} - \frac{1-\cos\theta}{\theta}\right]\sin\varphi + \left[\lambda\frac{1-\cos\theta}{\theta} - \frac{\theta-\sin\theta}{\theta}\right]\cos\varphi,\\
\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\right)_0 &= \frac{\theta-\sin\theta}{\theta}\cos(\varphi+\lambda+\theta) + \frac{1-\cos\theta}{\theta}\sin(\varphi+\lambda+\theta) - \sin\theta\sin\varphi - (1-\cos\theta)\cos\varphi,\\
\left(\frac{\partial\tau}{\partial\mu}\right)_0 &= -\left[\frac{\theta-\sin\theta}{\theta}\sin\varphi + \frac{1-\cos\theta}{\theta}\cos\varphi\right].
\end{aligned}$$

Ces expressions permettent de calculer $\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\mu^2}\right)_0$. Le résultat s'exprime plus simplement en posant

$$(20)\qquad \alpha = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}, \qquad \xi = \lambda + \theta,$$

on trouve alors que

$$\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\mu^2}\right)_0 = -4\alpha^2\left[\frac{\xi}{2}\sin\xi + \left(1 - \frac{\theta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right)(1-\cos\xi) - \theta\sin\xi\right].$$

Le calcul des autres coefficients $\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial\mu^2}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^4\eta}{\partial\mu^4}\right)_0$ du développement en série de η se fait de la même manière : il est long mais ne présente pas de difficultés théoriques essentielles. On constate que $\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial\mu^3}\right)_0 = 0$ et que, comme η_0, $\eta(\mu, \theta, \lambda)$ est une fonction paire de μ. D'autre part, $\left(\frac{\partial^n\eta}{\partial\mu^n}\right)_0$ est de degré $(n-1)$ au plus en λ; en particulier, $\left(\frac{\partial^4\eta}{\partial\mu^4}\right)_0$ contient des termes en λ^3, en λ^2, en λ et des termes indépendants de λ. Or, λ est beaucoup plus grand que l'unité et l'on peut négliger les termes en λ et les termes constants par rapport aux termes en λ^2 et en λ^3 (ce qui fait négliger, dans η, les termes en μ^4 et $\mu^4\lambda$ par rapport à ceux en $\mu^4\lambda^2$ et $\mu^4\lambda^3$). On trouve ainsi que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^4\eta}{\partial\mu^4}\right)_0 \sim\ & 3\alpha^4\lambda^3\sin\xi - 3\alpha^4\lambda^2\sin\xi\\
&\times\left[\theta + \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2} + 3\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}\right]\\
&+ 3\alpha^4\lambda^2\cos\xi\left[5\left(\frac{\theta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2} - 1\right) + 3\frac{\theta}{2}\frac{\cos\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right]\\
&+ 12\alpha^2\lambda^2\sin 2\xi\left(\frac{\theta - \sin\theta}{\theta^2}\right).
\end{aligned}$$

Ces différents résultats nous permettent de déterminer le début du développement en série du rendement de conversion η selon les puissances croissantes de μ. Nous avons, en effet,

$$\eta \sim \frac{\mu^2}{2}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\mu^2}\right)_0 + \frac{\mu^4}{24}\left(\frac{\partial^4\eta}{\partial\mu^4}\right)_0 + \ldots,$$

d'où

$$\begin{aligned}
(21)\quad \eta(\theta,\mu,\lambda) \sim\ & -2\mu^2\alpha^2\left[\left(1 - \frac{\theta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right)(1-\cos\xi) + \left(\frac{\xi}{2} - \theta\right)\sin\xi\right]\\
&+ \frac{\mu^4\alpha^4}{8}\lambda^3\sin\xi - \frac{\mu^4\alpha^4}{8}\lambda^2\sin\xi\\
&\times\left[\theta + \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2} + \frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}\right]\\
&+ \frac{\mu^4\alpha^4}{8}\lambda^2\cos\xi\left[5\left(\frac{\theta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2} - 1\right) + 3\frac{\theta}{2}\frac{\cos\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right]\\
&+ \frac{\mu^4\alpha^2}{2}\lambda^2\sin 2\xi\left(\frac{\theta - \sin\theta}{\theta^2}\right).
\end{aligned}$$

Cette formule est le *développement exact* de η selon les puissances croissantes de μ jusqu'aux

termes en $\mu^4 \lambda^2$ inclus : elle est valable quel que soit θ, angle mesurant la largeur du champ de haute fréquence G_1G_2.

Nous allons maintenant rechercher, pour le rendement, une *formule approchée* plus maniable et ceci en partant de η_0. Pour cela, formons $\eta_0(\alpha\mu, \xi)$, c'est-à-dire remplaçons dans l'expression précise (16) μ par $\alpha\mu$ et λ par ξ, puis développons en série et limitons-nous aux termes en $\alpha^4\mu^4\xi^3$ et $\alpha^4\mu^4\xi^2$.

Ce développement, dont l'origine est purement artificielle d'ailleurs, se trouve être comparable au développement de $\eta(\theta, \mu, \lambda)$: en particulier, les termes prépondérants se trouvent être les mêmes. Formons la différence $\eta(\theta, \mu, \lambda) - \eta_0(\alpha\mu, \xi)$: elle est égale à

$$\mu^2 \left\{ \begin{array}{l} -2\alpha^2\left(1 - \frac{\theta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right) \\ + \sin\xi \left[2\alpha^2\theta\left(1 - \frac{\mu^2\alpha^2\xi^2}{4}\right) \right. \\ \qquad \left. -\alpha^2\left\{\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\left(1 - \frac{\theta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right\}\frac{\mu^2\alpha^2\xi^2}{8}\right] \\ + \cos\xi \left[2\alpha^2\left(1 - \frac{\theta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right)\left(1 - \frac{\mu^2\alpha^2\xi^2}{4}\right) \right. \\ \qquad \left. -\alpha^2\left\{3\left(1 - \frac{\theta}{2}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right) + 1 - \frac{\theta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right\}\frac{\mu^2\alpha^2\xi^2}{8}\right] \\ \qquad + \sin 2\xi\left(\frac{\theta - \sin\theta}{\theta^2}\right)\frac{\mu^2\alpha^2\xi^2}{2}. \end{array} \right\}$$

Maintenant, tant qu'on se limite aux termes en μ^4 du développement de η, on a le droit de remplacer

$$1 - \frac{\mu^2\alpha^2\xi^2}{4} \quad \text{par} \quad J_0(\alpha\mu\xi),$$

$$\frac{\mu^2\alpha^2\xi^2}{8} \qquad J_2(\alpha\mu\xi),$$

$$\frac{\mu^2\alpha^2\xi^2}{2} \qquad J_2(2\alpha\mu\xi).$$

Ainsi, nous pouvons écrire

$$\eta(\theta, \mu, \lambda) = \eta_0(\alpha\mu, \xi) + \mu^2 S(\theta, \mu, \lambda) \tag{22}$$

avec

$$\begin{aligned} S(\theta, \mu, \lambda) = -A &+ [B J_0(\alpha\mu\xi) - C J_2(\alpha\mu\xi)]\sin\xi \\ &+ [A J_0(\alpha\mu\xi) - D J_2(\alpha\mu\xi)]\cos\xi \\ &+ E J_2(2\alpha\mu\xi)\sin 2\xi, \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}, \qquad \xi = \lambda + \theta.$$

S est une fonction de θ, μ et λ par l'intermédiaire des groupements ξ, $\alpha\mu\xi$, θ et qui tend vers zéro avec θ.

Les coefficients A, B, C, D, E sont des fonctions de θ et ont pour expressions

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 2\dfrac{2(1 - \cos\theta) - \theta\sin\theta}{\theta^2}, \\ B = 4\dfrac{1 - \cos\theta}{\theta}, \\ C = \dfrac{1}{\theta}\left[\dfrac{2\sin\theta}{\theta} - (1 + \cos\theta) + 3\sin\theta\sin\dfrac{\theta}{2}\right], \\ D = \dfrac{1}{\theta}\left[\dfrac{8(1 - \cos\theta)}{\theta} - 4\sin\theta - 6\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\theta\right], \\ E = \dfrac{\theta - \sin\theta}{\theta^2}. \end{array} \right. \tag{23}$$

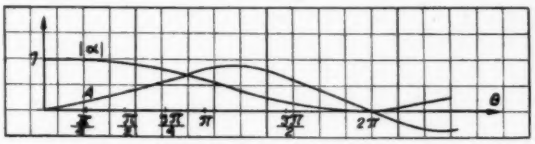


Fig. 4. — Calcul du rendement pour θ quelconque : variations de $|\alpha| = \dfrac{\sin\theta/2}{\theta/2}$ et de $A = 2\dfrac{2(1 - \cos\theta) - \theta\sin\theta}{\theta^2}$ avec θ.

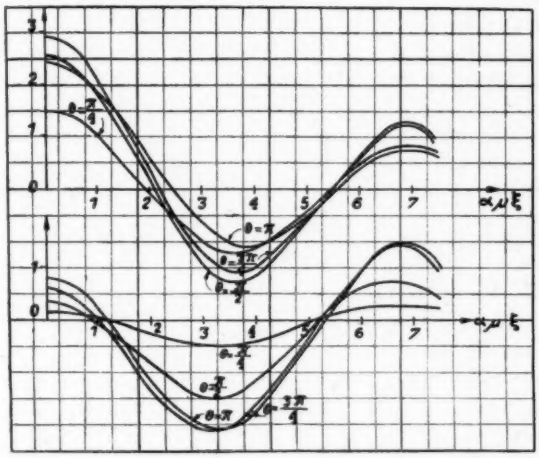


Fig. 5. — Calcul du rendement pour θ quelconque.

a. — Variations de $B J_0(\alpha\mu\xi) - C J_2(\alpha\mu\xi)$ avec $\alpha\mu\xi$ pour $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$.

b. — Variations de $A J_0(\alpha\mu\xi) - D J_2(\alpha\mu\xi)$ avec $\alpha\mu\xi$ pour les mêmes valeurs de θ.

Pour en faciliter le calcul, nous donnons figure 4 les courbes représentatives des variations de $|\alpha|$ et de A avec θ et en figure 5 (*a* et *b*) celles de

$$B J_0(\alpha\mu\xi) - C J_2(\alpha\mu\xi)$$

et de

$$A\,J_0(\alpha\mu\xi) - D\,J_2(\alpha\mu\xi)$$

avec $\alpha\xi\mu$ pour $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ et π.

Ainsi nous avons pu mettre l'expression du rendement de conversion, qui dépend de trois paramètres indépendants μ, θ et λ, sous forme d'une somme de deux termes dont l'un $\eta_0(\alpha\mu, \xi)$ ne dépend que des deux groupements de paramètres $\alpha\mu$ et ξ et dont les variations sont déjà connues, et dont l'autre $S(\theta, \mu, \lambda)$, qui joue le rôle de terme correctif, dépend des trois groupements θ, $\alpha\mu\xi$ et ξ.

Le développement de $\eta_0(\alpha\mu, \xi) + \mu^2 S$ coïncide avec le développement rigoureux de $\eta(\theta, \mu, \lambda)$ jusqu'aux termes en $\mu^4\lambda^3$ et $\mu^4\lambda^2$ quel que soit θ: nous adopterons cette expression comme formule approchée du rendement.

3.2. Représentation graphique du rendement de conversion et discussion.

Pour représenter graphiquement le rendement de conversion, si l'on porte sur les axes non pas les grandeurs λ et μ, mais ξ et $\alpha\mu$ (qui tendent d'ailleurs respectivement vers λ et μ lorsque θ tend vers zéro), les courbes d'équirendement ou courbes de niveau de la surface $\eta(\alpha\mu, \xi)$ apparaîtront pour chaque valeur de θ comme déformées des courbes de niveau relatives à $\theta = 0$, cette déformation ayant pour grandeur $\mu^2 S$. C'est ce qui a été fait sur la figure 6 où l'on a représenté, à côté du diagramme du rendement pour $\theta = 0$ ceux correspondant à θ égal à $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ et π.

Le plan de chaque diagramme est limité vers le haut par une courbe caractérisant la condition de non-réflexion. Celle-ci n'a pas été établie dans chaque cas d'une manière aussi rigoureuse que pour $\theta = 0$, bien qu'elle s'obtiendrait en écrivant que la vitesse des électrons aussi bien à l'aller qu'au retour ne peut s'annuler dans le champ H. F. Nous nous sommes basés sur les considérations suivantes :

On sait [1] que pour qu'à l'aller seulement il n'y ait pas réflexion des électrons par le champ H. F., il faut et suffit que $\mu \leq \frac{1}{3}$ si θ est petit et $\mu \leq \frac{\theta}{2}$ si $\theta \geq \frac{\pi}{2}$. Au retour, la condition de non-réflexion dépend de la phase d'entrée dans le champ H. F. des électrons de faible énergie cinétique et, par suite, de λ, comme il a été établi pour $\theta = 0$. Comme la plus faible vitesse des électrons ne peut que correspondre au potentiel $V_0 - U$, on est assuré qu'il n'y a pas réflexion pour $\theta = 0$ si $\mu \leq \frac{1}{4}$. De même, lorsque $\theta \geq \frac{\pi}{2}$ on est assuré qu'il n'y a pas réflexion si $\mu \leq \frac{\theta}{4}$ $\left(\text{ou } \alpha\mu \leq \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)$. C'est la droite $\alpha\mu = \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}$ qui a été figurée en pointillé sur les diagrammes correspondant à θ égal à $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$ et π, tandis que pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ on a tracé la même courbe que pour $\theta = 0$ mais en prenant, pour coordonnées, $\alpha\mu$ et ξ au lieu de μ et λ.

On constate sur ces diagrammes de rendement que la forme des régions du plan $(\alpha\mu, \xi)$ où l'oscillation du tube est possible évolue avec θ, si bien, par exemple, que pour $\theta = \pi$ le premier régime d'oscillation dans le voisinage de $\xi = 2\pi$ disparaît presque totalement [1]. On voit, par contre, apparaître au voisinage de $\xi = 0$, c'est-à-dire de $\lambda = 0$, une nouvelle région d'auto-oscillations qui n'existait pas pour $\theta = 0$; dans cette région d'ailleurs, le rendement maximum est très faible.

Dans chaque région où η est positif, la surface représentative du rendement présente un ou deux sommets (ou maxima de rendement) : lorsque θ croît, ces sommets se déplacent vers les plus grandes valeurs de μ, tout en tendant l'un vers l'autre, si bien que les régions à deux sommets deviennent des régions à un seul sommet.

Ces courbes font apparaître un rendement maximum de 30 % dans le deuxième régime d'oscillation, pour $\theta = \frac{3}{4}$ et pour $\theta = \pi$ (avec $\alpha\mu = 0{,}32$, soit, respectivement, $U = 0{,}85\ V_0$ et $U = V_0$), tandis que le rendement maximum était de 24 % pour $\theta = 0$.

Il est bon de remarquer que tout en supposant que l'on puisse disposer du paramètre μ à son gré, on ne peut toujours atteindre les maxima de rendement à moins d'*un réglage spécial du tube après démarrage*. En effet, pour une valeur donnée de μ, le rendement maximum (pour un certain régime d'oscillation) est obtenu pour une certaine valeur du paramètre ξ (ou λ) : si ce ξ est tel que lorsque μ est très petit, η est négatif [c'est-à-dire si le point de coordonnées $(\xi, 0)$ est dans une région hachurée], le tube auto-oscillateur ne démarrera pas. Ainsi

(1) Voir R. Warnecke et J. Bernier (*op. cit.*).

(1) Une étude plus approfondie permet de voir que le courant d'accrochage devient alors infiniment grand, c'est-à-dire que ce régime d'ocsillation ne présente plus d'intérêt.

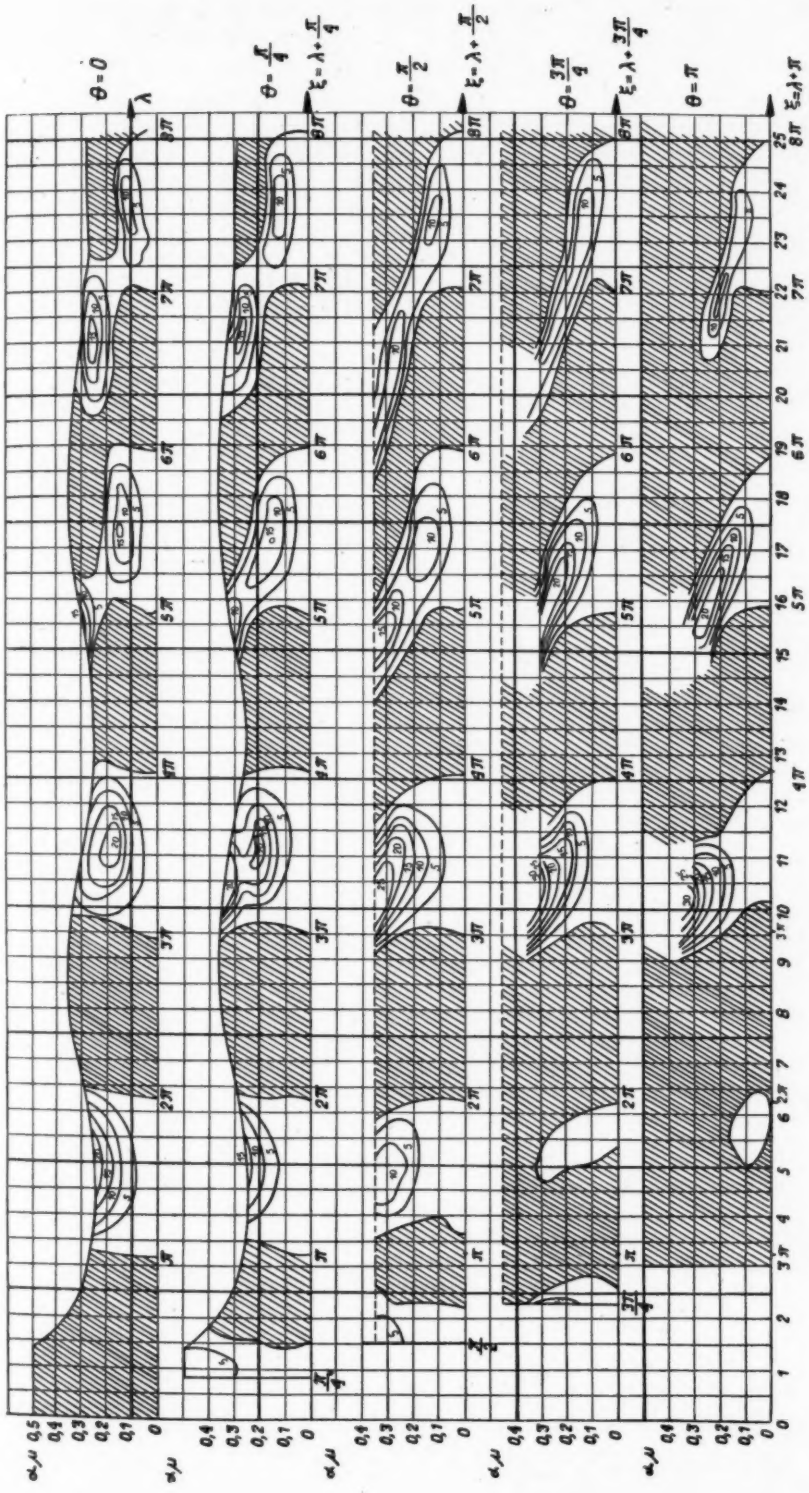


Fig. 6. — T. M. V. à réflexion totale : Diagrammes de rendement de conversion pour $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$, et π, en fonction de $\alpha\mu = \mu \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$ et de $\xi = \lambda + \theta$

(les courbes d'équirendement sont cotées de 5 en 5 %).

donc, pour atteindre un point de fonctionnement caractérisé par les valeurs $(\alpha\mu_0, \xi_0)$ des paramètres du tube, on sera parfois amené à accrocher avec une valeur de $\xi > \xi_0$ afin d'atteindre en régime permanent une valeur de $\mu < \mu_0$, puis par un réglage du circuit ou des tensions, faire décroître ξ jusqu'à ξ_0, tout en faisant croître μ jusqu'à μ_0 en restant dans la région où η est positif.

Si l'on n'admet pas la possibilité de ce réglage, les rendements maxima que l'on peut théoriquement atteindre pour une certaine valeur de μ peuvent être plus faibles, et il y a toujours lieu de se reporter aux diagrammes de la figure 6.

4. — Rendement de conversion des tubes a réflexion partielle.

Nous avons supposé, jusqu'à présent, que dans les tubes dont nous étudions le rendement de conversion le faisceau électronique est réfléchi totalement par l'électrode disposée à cet effet, et que tous les électrons incidents traversent, à nouveau, le champ H. F. au retour. Nous avons vu qu'alors le rendement est limité à environ 30 %.

Il est certain qu'une des raisons pour lesquelles le rendement se trouve limité à une aussi faible valeur est que certains électrons du faisceau passent au retour dans une mauvaise phase à travers le champ H. F. et qu'il y aurait intérêt à supprimer ceux-ci. Or, un moyen simple de sélectionner des électrons du faisceau consiste à porter le réflecteur au même potentiel que la cathode (ou à un potentiel légèrement supérieur) : tous les électrons qui sont accélérés à l'aller par le champ H. F. sont alors captés par l'électrode et ceux qui sont freinés sont réfléchis. Il se produit donc ainsi un véritable découpage du faisceau en tronçons équidistants, chacun correspondant à une demi pé iode et l'on peut se demander si ce découpage ne conduit pas à une mise en « paquets » des électrons provoquant une amélioration du rendement. L'examen de ce problème fait précisément l'objet de ce paragraphe : on y étudie le rendement de conversion d'un tube reflex dont l'électrode réfléchissante est au potentiel de la cathode ($V_R = 0$) et dont la longueur G_1G_2 du champ de haute fréquence est infiniment petite ($\theta = 0$).

4.1. Calcul du rendement de conversion.

Lorsque $V_R = 0$ et $\theta \to 0$, les électrons qui sont réfléchis sont ceux entrant dans le champ H. F. à l'aller à une phase φ telle que $\pi < \varphi < 2\pi$. Appelons η'_0 le rendement de conversion dans ces conditions : son expression intégrale est, d'après le paragraphe 1.2,

$$\eta'_0 = \lim_{\theta=0}\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{2\mu}{\theta}f(\varphi)+\frac{\mu^2}{\theta^2}f^2(\varphi)\right]d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\left[\frac{2\mu}{\theta}f_1(\varphi)+\frac{\mu^2}{\theta^2}f_1^2(\varphi)\right]d\varphi\right\}$$

avec

$$f(\varphi) = \cos(\psi+\sigma) - \cos\psi - \cos(\varphi+\tau) + \cos\varphi,$$
$$f_1(\varphi) = -\cos(\varphi+\tau) + \cos\varphi.$$

La limite de la première intégrale a déjà été établie au paragraphe 1.2 et est égale à

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(2\mu\sin\psi_0 - 2\mu\sin\varphi)\,d\varphi.$$

D'autre part,

$$\lim_{\theta=0}\frac{f_1(\varphi)}{\theta} = \left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)_0\sin\varphi$$

et comme

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)_0 = \frac{-1+\sqrt{1+2\mu\sin\varphi}}{\mu\sin\varphi},$$

l'élément différentiel de la deuxième intégrale est égal à

$$\left[1+\left(-1+\sqrt{1+2\mu\sin\varphi}\right)\right]^2 = 2\mu\sin\varphi.$$

Par suite, η'_0 a pour expression

$$\eta'_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(2\mu\sin\psi_0 - 2\mu\sin\varphi)\,d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}2\mu\sin\varphi\,d\varphi$$

ou encore, comme

$$\psi_0 = \varphi + \lambda\sqrt{1+2\mu\sin\varphi},$$

$$(24)\qquad \eta'_0 = \mu\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\varphi+\lambda\sqrt{1+2\mu\sin\varphi}\right)d\varphi.$$

Le calcul de cette intégrale fait l'objet de l'Annexe III. Il s'y introduit les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 déjà définis au paragraphe 2.2; en particulier, $a_2 \sim -\frac{\mu^2}{4}$ et $a^3 \sim \frac{\mu^3}{8}$. Nous supposerons ici μ et λ tels que $2J_1(a_3\lambda) \sim \frac{\mu^3\lambda}{8}$ et $2J_2(a_2\lambda) \sim \frac{\mu^4\lambda^2}{64}$ soient négligeables. Dans ces conditions, on trouve que le rendement de conversion a pour expression

$$(25)\quad \eta'_0(\mu,\lambda) = -\mu\left\{\begin{array}{l}\sin a_0\lambda\left\{J_0(a_2\lambda)J_1(a_1\lambda) - J_1(a_2\lambda)\right.\\ \qquad\left.\times[\Omega_1(a_1\lambda) - \Omega_2(a_1\lambda)]\right\}\\ +\cos a_0\lambda\left\{J_0(a_2\lambda)\Omega_1(a_1\lambda) + J_1(a_2\lambda)\right.\\ \qquad\left.\times[J_1(a_1\lambda) - J_2(a_1\lambda)]\right\}\end{array}\right\},$$

où Ω_1 et Ω_3 sont les fonctions de Lommel-Weber du premier et du troisième ordres [1].

Ces formules ne sont évidemment valables que si les électrons ne sont pas réfléchis par le champ H. F. G_1G_2. Mais la condition de non-réflexion des électrons est la même pour les tubes à réflexion partielle que pour les tubes à réflexion totale (§ 2.3) : les électrons qui ont, en effet, le plus de chance d'être réfléchis par le champ G_1G_2 sont ceux qui ont le moins d'énergie cinétique, c'est-à-dire ceux de plus faible vitesse, et ce sont précisément ces électrons qui ne sont pas captés par l'électrode P lorsqu'il y a réflexion partielle du faisceau.

4.2. Représentation graphique de η'_0 et discussion.

Le rendement de conversion η'_0 a été calculé à partir de la formule (25) pour des valeurs de λ comprises entre o et 8π et est représenté graphiquement en figure 7 (analogue à la figure 3, relative à η_0).

La figure 7 *b* est la projection horizontale de la surface $\eta'_0(\lambda, \mu)$: elle est limitée vers le haut par la courbe provenant de la condition de non-réflexion par le champ H. F. La figure 7 *a* représente le contour apparent frontal de la surface et donne donc la valeur maximum de η'_0 pour chaque valeur de λ : la valeur correspondante de μ se lit sur la figure 7 *b*.

Les régions du plan (λ, μ) où η'_0 est négatif sont hachurées : elles sont limitées latéralement par des arcs d'hyperboles (presque rectilignes) coupant

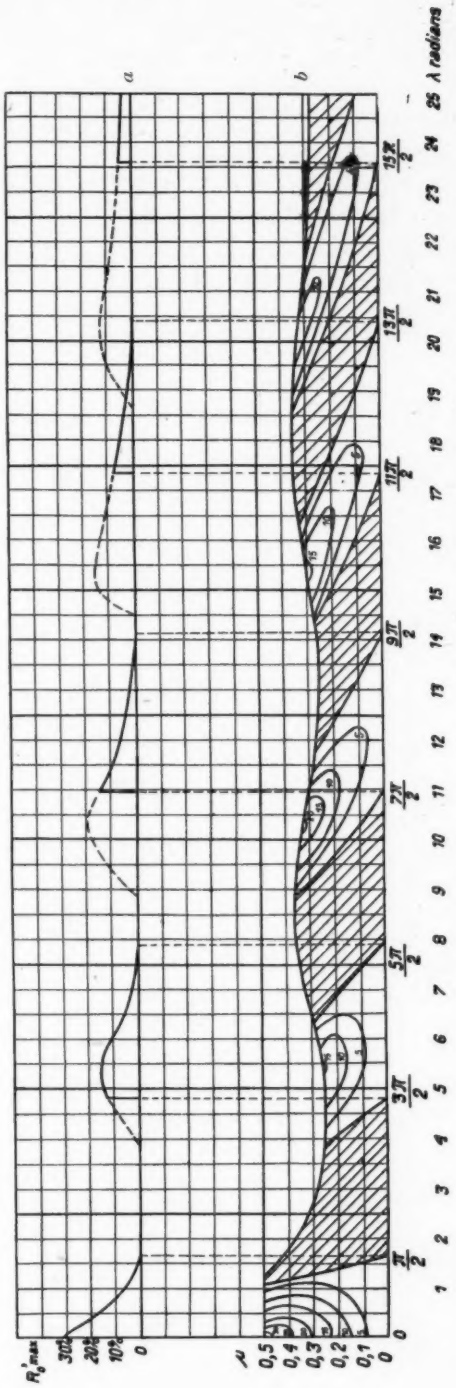


Fig. 7. — T. M. V. à réflexion partielle ($V_R = o$). Rendement de conversion pour $\theta = o$.

a. — Variations de $(\eta'_0\,\lambda)_{max.}$ avec λ. *b*. — Courbes d'équirendement en fonction de λ et de μ (courbes cotées de 5 en 5 %).

---

[1] *Voir* JANKHE-EMDE, *Tables of Functions*, 2e édition, p. 211.

Les fonctions Ω_n de Lommel-Weber sont définies par l'intégrale

$$\Omega_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi\,;$$

elles sont donc différentes des fonctions de Bessel :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi,$$

mais présentent des relations de récurrence analogues. Ainsi

$$\Omega_{n-1}(x) + \Omega_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}\,\Omega_n(x) + \frac{2}{\pi x}\left[1 - (-1)^n\right],$$

$$\Omega_{n-1}(x) - \Omega_{n+1}(x) = 2\,\Omega'_n(x).$$

La fonction Ω_n a pour développement en série

$$\Omega_n(x) = \frac{(-1)^n - 1}{n\pi}\left[1 - \frac{x^2}{2^2 - n^2} + \frac{x^4}{(2^2 - n^2)(4^2 - n^2)} + \dots\right]$$
$$+ \frac{1 + (-1)^n}{\pi}\left[\frac{x}{1^2 - n^2} - \frac{x^3}{(1^2 - n^2)(3^2 - n^2)} + \dots\right].$$

l'axe des λ aux points $\lambda = n\pi + \frac{\pi}{2}$ et le long desquelles le rendement est nul [1].

De l'examen de la figure 7 on conclut que, contrairement à ce qui se produit lorsqu'aucun électron n'est capté par l'électrode P :

1° C'est la condition de non-réflexion des électrons par le champ H. F. qui limite les maxima de η'_0 pour chaque régime d'oscillation.

2° Lorsque μ est très petit, les régions pour lesquelles η'_0 est positif sont définies par

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} < \lambda < (2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}.$$

3° η'_0 est positif lorsque λ est voisin de zéro (c'est-à-dire lorsque le réflecteur P est très proche de G_1G_2) et même atteint son maximum absolu égal à $\frac{1}{\pi}$ ou 32 % lorsque $\lambda = 0$ et $\mu = \frac{1}{2}$ [2].

---

(1) En effet, on peut, en première approximation, négliger $J_1(a_2\lambda)$ dans l'expression (25) de η'_0 et considérer que $J_0(a_2\lambda) = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = \mu$ et que, par suite,

$$\eta'_0 \sim -\mu[J_1(\mu\lambda)\sin\lambda + \Omega_1(\mu\lambda)\cos\lambda].$$

Il s'ensuit que $\eta'_0 = 0$ pour

$$-\frac{J_1(\mu\lambda)}{\Omega_1(\mu\lambda)} = \operatorname{cotg}\lambda.$$

Or, pour de petites valeurs de l'argument

$$J_1(x) \sim \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16}, \qquad \Omega_1(x) \sim -\frac{2}{\pi}\left[1 - \frac{x^2}{3} + \ldots\right],$$

d'où

$$-\frac{J_1(x)}{\Omega_1(x)} \sim \frac{\pi}{2}\left[\frac{x}{2} + \ldots\right].$$

Lorsque $\mu = 0$, la racine de l'équation $\eta'_0 = 0$ tend vers $\lambda = n\pi + \frac{\pi}{2}$. En remplaçant les deux membres infiniment petits par le premier terme de leur développement en série, on obtient

$$\frac{\pi}{4}\mu = -\left[1 - \frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{\lambda}\right],$$

équation d'une famille d'hyperboles équilatères d'asymptote horizontale $\mu = -\frac{4}{\pi}$ et coupant l'axe des λ aux points $\lambda = n\pi + \frac{\pi}{2}$.

(2) En développant η'_0 en série selon les puissances de λ, on obtient

$$\eta'_0 \sim \mu\left[\frac{2}{\pi} - \lambda^2\left(\frac{2}{\pi}\frac{a_1^2}{3} + \frac{2}{\pi}\frac{a_0^2}{2} + \frac{a_0 a_1}{2}\right) + \ldots\right].$$

D'après les formules (7) de l'Annexe I, pour

$$\mu = \frac{1}{2}, \qquad a_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}, \qquad a_1 = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi},$$

d'où

$$(\eta'_0)_{\mu=\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{\pi}[1 - 1{,}76\lambda^2].$$

Les valeurs des divers maxima de η'_0 sont indiquées dans le Tableau II.

Il est à remarquer que ces valeurs de rendement, à part les deux premières, ne peuvent être atteintes qu'à la suite d'un *réglage spécial du tube en cours de fonctionnement*, réglage analogue à celui décrit au paragraphe 3.2. En effet, à partir du troisième régime d'oscillation, pour atteindre le rendement maximum, il faut, après que le tube ait accroché, faire simultanément croître μ et décroître λ, en agissant, par exemple, sur la tension V_0 et le circuit de charge, sans toucher à la tension V_R du réflecteur qui doit rester nulle.

Si l'on ne fait pas cette opération, on constate, sur la figure 7, que les valeurs optima de λ pour les régimes d'oscillation autres que le premier ou le deuxième sont $\lambda = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ et les rendements maxima correspondants sont ceux indiqués dans le Tableau III. En première approximation, on peut dire qu'alors $\eta'_{0\max} \sim \mu J_1(\mu\lambda)$, valeur moitié moindre que celle du rendement maximum η_0 dans le cas de la réflexion totale, et que l'on obtient d'ailleurs, pour des régimes d'oscillations semblables, avec les mêmes valeurs de μ et de λ.

De toutes manières, en comparant les Tableaux II et III au Tableau I, on constate qu'à tension H. F. égale les rendements maxima des tubes à réflexion partielle sont nettement inférieurs à ceux des tubes à réflexion totale.

TABLEAU II.

$(\eta'_0)_{\max}$ (%).	λ radians.	$\mu = \frac{U}{2V_0}$.	
32.....	0	0,5	Régime 0
15.....	5,5	0,26	1er régime
20.....	10,3	0,32	2e »
16.....	15,4	0,30	3e »
14.....	20,3	0,33	4e »

TABLEAU III.

η'_0 (%).	λ radians.	$\mu = \frac{U}{2V_0}$.	
32.....	0	0,5	Régime 0
15.....	5,5	0,26	1er régime
14.....	$7\frac{\pi}{2}$	0,24	2e »
8.....	$11\frac{\pi}{2}$	0,15	3e »
6.....	$15\frac{\pi}{2}$	0,12	4e »

5. RÉSUMÉ.

L'objet du présent travail était l'étude des tubes auto-oscillateurs à modulation de vitesse et à

champ retardateur. Au point de vue de leur théorie mathématique et quoiqu'on puisse, dans une certaine mesure, les assimiler à des tubes à espace de glissement dont la distance entre les champs H. F. rassembleur et collecteur serait égale à environ quatre fois la distance de G_1G_2 au réflecteur [1], ils diffèrent de ces derniers essentiellement par les deux points suivants :

1° Pour un bon rendement, l'amplitude U de la tension alternative entre les grilles G_1G_2 doit être de l'ordre de grandeur de la tension continue accélératrice V_0 et, par suite, les variations du temps de transit des électrons dans le champ H. F. ainsi que la modulation de leur vitesse v_1 à la sortie sont loin d'être sinusoïdales.

2° La différence des phases de passage des électrons dans le champ H. F. au lieu d'être proportionnelle à $\frac{lv_0}{v_1}$, comme dans les tubes à espace de glissement, est proportionnelle à $\frac{lv_1}{v_0}$ si bien que ce sont les électrons les plus lents qui franchissent, en premier, le champ collecteur.

Toute théorie basée sur une équivalence des tubes à champ retardateur et des tubes à espace de glissement conduit, de ce fait, à des résultats erronés.

Sous les hypothèses d'une charge d'espace négligeable, de trajectoires électroniques rectilignes et parallèles, de champ H. F. longitudinal, uniforme et strictement limité aux grilles G_1G_2, de champ retardateur uniforme, l'analyse mathématique indique que le rendement de conversion des tubes reflex, qui dépend apparemment de 6 paramètres (3 paramètres de tension V_0, V_R et U, 2 paramètres de dimensions l et h et la pulsation ω) ne dépend, effectivement que des 3 paramètres

$$\mu = \frac{1}{2}\frac{U}{V_0}, \qquad \theta = \frac{\omega h}{v_0}, \qquad \lambda = 4\frac{\omega l}{v_0}\frac{V_0}{V_0 - V_R}$$

et même, pour des valeurs pas trop élevées de θ $\left(\text{par exemple } \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$, des deux seules combinaisons

$$\alpha\mu = \mu\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad \xi = \lambda + \theta.$$

Par suite, le fonctionnement du tube peut être caractérisé par un point de coordonnées $(\alpha\mu, \xi)$.

Nous avons calculé et discuté le rendement de conversion des tubes à champ retardateur dans les trois cas suivants :

1° Réflexion totale du faisceau et $\theta \to 0$ (cas idéal fondamental) [form. (16)];

2° Réflexion totale du faisceau et θ quelconque [form. (22)];

3° Réflexion partielle du faisceau ($V_R = 0$) et $\theta \to 0$ [form. (25)].

Dans chacun de ces cas, on voit apparaître *différents régimes d'oscillation* correspondant à des valeurs de λ à peu près équidistantes de 2π et qui, dans les diagrammes de la figure 4, se situent dans des zones du plan $(\alpha\mu, \xi)$.

La forme de ces régions d'auto-oscillation possible évolue avec θ et même celles-ci peuvent disparaître (*fig.* 6).

A l'intérieur de chacune des régions d'oscillation le rendement maximum de conversion peut être limité dans certains cas :

par la *condition de non-réflexion* des électrons par le champ H. F.,

par la possibilité d'*un certain réglage du tube après démarrage* en agissant simultanément sur μ et λ (*voir* §§ 3.2 et 4.2).

Pour les tubes à réflexion partielle, à part le régime un peu exceptionnel (régime zéro) pour lequel on a un rendement théorique de 32 % lorsque $\lambda = 0$ et $\mu = 0{,}5$ ($U = V_0$, $V_R = 0$), les rendements maxima sont toujours inférieurs à ceux correspondants des tubes à réflexion totale, et même sont environ moitié plus faibles si l'on n'admet pas la possibilité du réglage signalé ci-dessus (*voir* Tableaux II et III et figure 7).

Pour les tubes à réflexion totale et à champ H. F. infiniment étroit ($\theta = 0$), les rendements maxima sont les plus élevés (et presque égaux) dans les deux premiers régimes d'oscillations, à savoir 25 % pour $\lambda = 5$ radians et $\mu = 0{,}25$, et 24 % pour $\lambda = 11{,}25$ radians et $\mu = 0{,}17$. Par contre, pour de faibles rapports des tensions alternative et continue,

---

[1] Le paramètre λ introduit au paragraphe 1.1 joue, en effet, le même rôle que le paramètre λ introduit dans notre étude déjà citée des tubes à glissement. Pour ces derniers, on avait $\lambda = \frac{\omega l}{v_0}$ tandis qu'ici

$$\lambda = 4l\frac{\omega V_0}{v_0(V_0 - V_R)}.$$

D'autre part, si le rapport μ des tensions est très petit, on trouve, d'après (16), que

$$\eta_0 \sim -2\mu J_1(\mu\lambda)\sin\lambda$$

formule identique à celle obtenue pour les tubes à espace de glissement.

on doit rechercher un meilleur rendement dans les régimes d'oscillations d'ordre plus élevé : ainsi, pour $\mu = 0{,}1$, le rendement maximum est de 5 % pour le 1er régime, 10 % pour le 2e, 11 % pour le 3e, 12 % pour le 4e, etc. D'une façon générale, pour les régimes d'ordre élevé, les maxima de rendement ont lieu approximativement pour

$$\lambda = 2n\pi - \frac{\pi}{2}, \qquad \mu = \frac{2{,}40}{\lambda}$$

et alors

$$\eta_{10\,\max} \sim \frac{0{,}4}{\left(n - \frac{1}{4}\right)}.$$

Pour les tubes à réflexion totale dont le champ H. F. *est de largeur finie* (θ quelconque), la discussion du phénomène est plus délicate et il faut se reporter aux courbes de la figure 6, tracées pour des valeurs de θ allant de 0 à π. Pour une même valeur de μ, le rendement décroît en général lorsque θ augmente, mais dès le 2e régime d'oscillation, les courbes de rendement maximum à μ constant peuvent présenter un maximum pour certaines valeurs de θ, c'est-à-dire que, *pour une tension alternative donnée, il existe une valeur optimum de largeur du champ* H. F. Cependant, il apparaît sur les diagrammes de la figure 6 (où les ordonnées sont $\alpha\mu$) que *les meilleurs rendements sont obtenus dans le 2e régime d'oscillation* (le 1er régime s'évanouissant lorsque θ augmente). Il est de 24 % pour les petites valeurs de θ et atteint 30 % pour $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ($U = 0{,}85\ V_0$) ainsi que pour $\theta = \pi$ ($U = V_0$).

ANNEXE I.

Développement de $\sqrt{1 + 2\mu\cos\varphi}$ en série de Fourier.

$\sqrt{1 + 2\mu\cos\varphi}$ est une fonction paire : son développement en série de Fourier est donc de la forme

$$\sqrt{1 + 2\mu\cos\varphi} = a_0 + a_1\cos\varphi + \ldots + a_n\cos n\varphi + \ldots.$$

Posons

$$\psi = \frac{\varphi}{2}, \qquad K^2 = \frac{4\mu}{1 + 2\mu},$$

alors

$$\sqrt{1 + 2\mu\cos\varphi} = \sqrt{1 + 2\mu}\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}.$$

Le développement en série de Fourier de $\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}$ est de la forme

$$(1) \qquad \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi} = b_0 + b_2\cos 2\psi + \ldots + b_{2n}\cos 2n\psi + \ldots,$$

et, par suite,

$$a_0 = \sqrt{1 + 2\mu}\,b_0,$$
$$a_1 = \sqrt{1 + 2\mu}\,b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = \sqrt{1 + 2\mu}\,b_{2n}.$$

Calcul des coefficients $b_0, b_2, \ldots, b_n, \ldots$.

Ceux-ci s'expriment à l'aide des intégrales elliptiques complètes.

Appelons, selon l'usage,

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}},$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}\,d\psi.$$

D'après le théorème de Fourier

$$b_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}\,d\psi \qquad \text{ou} \qquad b_0 = \frac{2}{\pi}E(k),$$

$$b_2 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}\cos 2\psi\,d\psi$$

ou

$$\frac{\pi}{4}b_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}(1 - 2\sin^2\psi)\,d\psi,$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - (2 + k^2)\sin^2\psi + 2k^2\sin^4\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}\,d\psi,$$

d'où

$$(2) \qquad \frac{\pi}{4}b_2 = K(k) - (2 + k^2)U_2 + 2k^2U_4$$

avec

$$U_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}\,d\psi.$$

Or, on a

$$\frac{d}{d\psi}\left[\sin\psi\cos\psi\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}\right] = (\cos^2\psi - \sin^2\psi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi} - \frac{k^2\sin^2\psi\cos^2\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}},$$

et en intégrant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on obtient

$$(3) \qquad 0 = \frac{\pi}{4}b_2 - k^2[U_2 - U_4].$$

De (2) et (3), on tire

$$U_4 = \frac{1}{3k^2}[(2 + 2k^2)U_2 - K], \qquad \frac{\pi}{4}b_2 = \frac{K}{3} - \frac{1}{3}(2 - k^2)U_2.$$

Or, il est évident que K et E sont reliés par

$$K - k^2 U_2 = E,$$

d'où

$$b_2 = \frac{4}{\pi}\left[\frac{K}{3} - \frac{1}{3}(2-k^2)\frac{K-E}{k^2}\right].$$

Les autres coefficients b_{2p} ont pour expression

$$b_{2p} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\cos 2p\psi\, d\psi.$$

Nous en obtiendrons, comme il est bien connu, une loi de récurrence de la façon suivante :

Dérivons les deux membres de (1) par rapport à ψ, soit

$$(4)\quad \frac{k^2\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = 2b_2\sin 2\psi - 4b_4\sin 4\psi + \ldots + 2nb_{2n}\sin 2n\psi + \ldots.$$

Mais,

$$\sin 2\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi} = \frac{2\sin\psi\cos\psi\left[1-\frac{k^2}{2}(1-\cos 2\psi)\right]}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

$$= \frac{k^2\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\left[\frac{2-k^2}{k^2} + \cos 2\psi\right].$$

Par suite, le deuxième membre de (4), multiplié par $\frac{2-k^2}{k^2} + \cos 2\psi$ doit être identique au deuxième membre de (1) multiplié par $\sin 2\psi$, soit

$$(5)\quad \sin 2\psi[b_0 + b_2\cos 2\psi + \ldots + b_{2n}\cos 2n\psi + \ldots]$$
$$= \left[\frac{2-k^2}{k^2} + \cos 2\psi\right][2b_2\sin 2\psi + \ldots + 2nb_{2n}\sin 2n\psi].$$

or,

$$\sin 2\psi\cos 2n\psi = \frac{1}{2}[\sin 2(n+1)\psi - \sin 2(n-1)\psi],$$

$$\cos 2\psi\sin 2n\psi = \frac{1}{2}[\sin 2(n+1)\psi + \sin 2(n-1)\psi].$$

Le premier membre de (5) s'écrit

$$\left(b_0 - \frac{1}{2}b_4\right)\sin 2\psi + \ldots + \frac{1}{2}[b_{2n-2} - b_{2n+2}]\sin 2n\psi + \ldots.$$

Le deuxième membre s'écrit

$$2\left[\frac{2-k^2}{k^2}b_2\sin 2\psi + \ldots + 2n\frac{2-k^2}{k^2}b_{2n}\sin 2n\psi + \ldots\right]$$
$$+ \frac{1}{2}[4b_4\sin 2\psi + (2b_2 + 6b_6)\sin 4\psi + \ldots]$$
$$+ [(2n-2)b_{2n-2} + (2n+2)b_{2n+2}]\sin 2\psi + \ldots.$$

En identifiant les coefficients des termes en $\sin 2n\psi$, on obtient les formules de récurrence cherchées :

$$(6)\quad \begin{cases} b_0 - \frac{1}{2}b_4 = 2\frac{2-k^2}{k^2}b_2 + 2b_4, \\ \frac{1}{2}[b_2 - b_6] = 4\frac{2-k^2}{k^2}b_4 + \frac{1}{2}(2b_2 + 6b_6), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{2}[b_{2n-2} - b_{2n+2}] = 2n\frac{2-k^2}{k^2}b_{2n} \\ \qquad + \frac{1}{2}[(2n-2)b_{2n-2} + (2n+2)b_{2n+2}]. \end{cases}$$

Formules de récurrence pour les coefficients a.

De (1) et (6), on déduit les formules de récurrence pour les coefficients a :

$$(7)\quad \begin{cases} a_0 = \frac{2}{\pi}\sqrt{1+2\mu}\,E, \\ a_1 = \frac{2}{\pi}\sqrt{1+2\mu}\,\frac{2}{3}\left[K - \frac{2-k^2}{k^2}(K-E)\right], \\ \left(2+\frac{1}{2}\right)a_2 = a_0 - 2\frac{2-k^2}{k^2}a_1, \\ \left(3+\frac{1}{2}\right)a_3 = -\left[\frac{1}{2}a_1 + 4\frac{2-k^2}{k^2}a_2\right], \\ \left(n+\frac{1}{2}\right)a_n = -\left[\left(n-\frac{3}{2}\right)a_{n-2} + 2(n-1)\frac{2-k^2}{k^2}a_{n-1}\right]. \end{cases}$$

Dans ces formules, le module des intégrales elliptiques completes E et K est

$$k^2 = \frac{4\mu}{1+2\mu}$$

et, par suite, la quantité $\frac{2-k^2}{k^2}$ est égale à $\frac{1}{2\mu}$.

Développements en série des coefficients a.

Même pour les petites valeurs de μ, le module k des fonctions elliptiques est suffisamment important pour que le développement en série selon les puissances croissantes de k soit trop lentement convergent. Aussi ferons-nous la transformation de Landen [1] en posant

$$(8)\quad k_1 = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1+k^2}} = \frac{1-\sqrt{1-4\mu^2}}{2\mu} \sim \mu + \mu^3 + 2\mu^5,$$

d'où

$$k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}.$$

---

[1] O. Schlœmilch, *Théorie des intégrales et des fonctions elliptiques*, Gauthier-Villars, 1873.

Dans ces conditions,

$$K(k) = (1+k_1)\,K(k_1),$$

$$E(k) = \frac{1-k}{1+k_1}\left[\left(\frac{1-k_1}{1+k_1}\right)K + 2k_1\frac{dK}{dk_1}\right],$$

et, par suite,

$$\frac{2}{\pi}K(k) = (1+k_1)\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k_1^4 + \ldots + \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 k_1^{2n} + \ldots\right],$$

$$\frac{2}{\pi}E(k) = (1-k_1)\left[1+5\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2 + 9\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k_1^4 + \ldots + (4n+1)\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 k_1^{2n} + \ldots\right].$$

On en déduit

$$\frac{2}{\pi}[K-E] = -\left[4\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2 + \ldots + 4n\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 k_1^{2n} + \ldots\right] + k_1\left[2+6\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2 + \ldots + (4n+2)\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 k_1^{2n} + \ldots\right]$$

et comme

$$\frac{2-k^2}{k^2} = \frac{1+k^2}{2k_1},$$

on trouve, toutes réductions faites, pour l'expression de $K - \frac{2-k^2}{k^2}(K-E)$

$$K - \frac{2-k^2}{k^2}(K-E) = (1-k_1)\left\{\begin{array}{l} \left[1+2\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]k_1 + \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\right]k_1^3 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \left[(2n-1)\left(\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\right)^2 + 2n\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2\right]k_1^{2n-1} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

Par suite, les développements de a_0 et a_1 sont

$$a_0 = \sqrt{1+2\mu}\,(1-k_1)\left[1+\frac{5}{4}k_1^2 + \frac{81}{64}k_1^4 + \ldots + (4n+1)\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 k_1^{2n} + \ldots\right],$$

$$a_1 = \sqrt{1+2\mu}\,(1-k_1)k_1\left[1+\frac{7}{8}k_1^2 + \frac{55}{64}k_1^4 + \ldots + \frac{4n(4n-1)}{3(2n-1)}\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 k_1^{2n-2} + \ldots\right].$$

Les développements de a_2, a_3, ... s'obtiennent par les formules de récurrence (7).

On obtient ainsi les développements suivants des coefficients a_0, a_1, ... :

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} a_0 = \sqrt{1+2\mu}\,(1-k_1)\left[1+\frac{5}{4}k_1^2 + \frac{81}{64}k_1^4 + \ldots\right], \\ a_1 = \sqrt{1+2\mu}\,(1-k_1)k_1\left[1+\frac{7}{8}k_1^2 + \frac{55}{64}k_1^4 + \ldots\right], \\ a_2 = -\sqrt{1+2\mu}\,(1-k_1)k_1^2\left[\frac{1}{4}+\frac{3}{16}k_1^2 + \ldots\right], \\ a_3 = \sqrt{1+2\mu}\,(1-k_1)k_1^3\left[\frac{1}{8}+\frac{11}{27}k_1^2 + \ldots\right], \\ a_4 = -\sqrt{1+2\mu}\,(1-k_1)k_1^4\left[\frac{5}{64} + \ldots\right]. \end{array}\right.$$

Ces développements sont très rapidement convergents dans l'intervalle de variation de μ : la condition de non-réflexion des électrons par le champ H. F. impose, en effet, à μ la valeur maximum 0,35 et par suite, k_1 reste inférieur à 0,30. Pour $k_1 = 0{,}30$, a_3 est de l'ordre de 3.10^{-3}.

Développement des coefficients a selon les puissances croissantes de μ.

Nous limiterons ces développements aux termes en μ^4 inclus. D'après (8), nous avons

$$k_1 \sim \mu + \mu^3 + 2\mu^5,$$

d'où

$$k_1^2 \sim \mu^2 + 2\mu^4,$$

$$\sqrt{1+2\mu}\,(1-k_1) \sim 1 - \frac{3}{2}\mu^2 - \frac{17}{8}\mu^4,$$

et des relations (9) on déduit les développements suivants des coefficients a

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} a_0 \sim 1 - \frac{\mu^2}{4} - \frac{15}{64}\mu^4, \\ a_1 \sim \mu + \frac{3}{8}\mu^3, \\ a_2 \sim -\left[\frac{\mu^2}{4} + \frac{5}{16}\mu^4 + \ldots\right], \\ a_3 \sim +\frac{\mu^3}{8} + \ldots, \\ a_4 \sim -\frac{5}{64}\mu^4 - \ldots. \end{array}\right.$$

(Le coefficient a_n est de l'ordre de μ^n.)

ANNEXE II.

Calcul de l'intégrale

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left(\varphi - \lambda\sqrt{1+2\mu\cos\varphi}\right)d\varphi$$

et de γ_0.

D'après l'Annexe I [form. (10)] et la condition de non-réflexion discutée au paragraphe 2.3, on peut

limiter le développement de $\sqrt{1+2\mu\cos\varphi}$ aux quatre premiers termes, soit

$$\sqrt{1+2\mu\cos\varphi} = a_0 + a_1\cos\varphi + a_2\cos 2\varphi + a_3\cos 3\varphi.$$

Le coefficient a_3 est, en effet, très petit et les coefficients a_4, a_5, ... sont négligeables.

L'intégrale

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left(\varphi - \lambda\sqrt{1+2\mu\cos\varphi}\right) d\varphi$$

s'écrit

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\varphi\cos(a_0\lambda + a_1\lambda\cos\varphi + a_2\lambda\cos 2\varphi + a_3\lambda\cos 3\varphi)\,d\varphi$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\varphi\sin(a_0\lambda + a_1\lambda\cos\varphi + a_2\lambda\cos 2\varphi + a_3\lambda\cos 3\varphi)\,d\varphi.$$

L'élément différentiel de la deuxième intégrale est impair, et, par suite, cette deuxième intégrale est nulle, d'où

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Y\cos\varphi\,d\varphi$$

avec

$$Y = \cos(a_0\lambda + a_1\lambda\cos\varphi + a_2\lambda\cos 2\varphi + a_3\lambda\cos 3\varphi).$$

Nous pouvons développer Y, qui est une fonction paire, en série de Fourier de la forme

$$Y = n_0 + n_1\cos\varphi + n_2\cos 2\varphi + \ldots + n_n\cos n\varphi + \ldots,$$

et comme

$$\int_0^{2\pi}\cos\varphi\cos n\varphi\,d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq 1, \\ \pi, & \text{si } n = 1, \end{cases}$$

on en déduit que

$$(1) \qquad I = \frac{1}{2}n_1.$$

Il suffit donc de rechercher le coefficient de $\cos\varphi$ dans le développement de Y.

A l'aide des formules trigonométriques habituelles, on met Y sous la forme

$$(2) \quad Y = \left\{\begin{array}{l} \cos a_0\lambda \left\{\begin{array}{l} \cos(a_1\lambda\cos\varphi)\cos(a_2\lambda\cos 2\varphi)\cos(a_3\lambda\cos 3\varphi) \\ -\sin(a_1\lambda\cos\varphi)\sin(a_2\lambda\cos 2\varphi)\cos(a_3\lambda\cos 3\varphi) \\ -\sin(a_1\lambda\cos\varphi)\cos(a_2\lambda\cos 2\varphi)\sin(a_3\lambda\cos 3\varphi) \\ -\cos(a_1\lambda\cos\varphi)\sin(a_2\lambda\cos 2\varphi)\sin(a_3\lambda\cos 3\varphi) \end{array}\right\} \\ - \\ \sin a_0\lambda \left\{\begin{array}{l} -\sin(a_1\lambda\cos\varphi)\sin(a_2\lambda\cos 2\varphi)\sin(a_3\lambda\cos 3\varphi) \\ +\sin(a_1\lambda\cos\varphi)\cos(a_2\lambda\cos 2\varphi)\cos(a_3\lambda\cos 3\varphi) \\ +\cos(a_1\lambda\cos\varphi)\sin(a_2\lambda\cos 2\varphi)\cos(a_3\lambda\cos 3\varphi) \\ +\cos(a_1\lambda\cos\varphi)\cos(a_2\lambda\cos 2\varphi)\sin(a_3\lambda\cos 3\varphi) \end{array}\right\} \end{array}\right\}.$$

Or, les termes en $\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(a_n\lambda\cos n\varphi)$ admettent pour développements en série de Fourier, les expressions suivantes (où J_n indique la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre n) :

$$(3) \quad \left\{\begin{array}{llll} \cos(a_1\lambda\cos\varphi) & = J_0(a_1\lambda) + \sum_1^\infty A_{2p}\cos 2p\varphi, & \text{où } A_{2p} & = (-1)^p\ 2J_{2p}\ (a_1\lambda), \\ \cos(a_2\lambda\cos 2\varphi) & = J_0(a_2\lambda) + \sum_1^\infty B_{2q}\cos 4q\varphi, & \text{»}\ B_{2q} & = (-1)^q\ 2J_{2q}\ (a_2\lambda), \\ \cos(a_3\lambda\cos 3\varphi) & = J_0(a_3\lambda) + \sum_1^\infty C_{2r}\cos 6r\varphi, & \text{»}\ C_{2r} & = (-1)^r\ 2J_{2r}\ (a_3\lambda); \\ \sin(a_1\lambda\cos\varphi) & = \sum_1^\infty D_{2p-1}\cos(2p-1)\varphi, & \text{»}\ D_{2p-1} & = (-1)^{p-1}\ 2J_{2p-1}\ (a_1\lambda), \\ \sin(a_2\lambda\cos 2\varphi) & = \sum_1^\infty E_{2q-1}\cos(4q-2)\varphi, & \text{»}\ E_{2q-1} & = (-1)^{q-1}\ 2J_{2q-1}\ (a_2\lambda), \\ \sin(a_3\lambda\cos 3\varphi) & = \sum_1^\infty F_{2r-1}\cos(6r-3)\varphi, & \text{»}\ F_{2r-1} & = (-1)^{r-1}\ 2J_{2r-1}\ (a_3\lambda). \end{array}\right.$$

A partir de (2) et (3), on peut mettre Y sous la forme d'une somme de produits de cosinus de trois angles $\alpha\varphi$, $\beta\varphi$, $\gamma\varphi$. Nous devons transformer cette somme de produits en somme de cosinus et ne calculer dans cette deuxième somme que le coefficient de $\cos\varphi$.

Pour cette recherche, nous nous baserons sur l'identité suivante :

$$(4) \quad \cos\alpha\varphi\cos\beta\varphi\cos\gamma\varphi = \frac{1}{4}[\cos(\alpha+\beta+\gamma)\varphi + \cos(\alpha+\beta+\gamma)\varphi + \cos(\alpha-\beta-\gamma)\varphi + \cos(\alpha-\beta+\gamma)\varphi].$$

Cette identité est valable même si $\alpha=\beta$ ou $\alpha=\beta=\gamma$.

Dans notre cas particulier, α, β et γ sont des nombres entiers positifs et

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha \text{ est de la forme } \begin{cases} 2p & p \geqq 0, \\ 2p-1 & p \geqq 1; \end{cases} \\ \beta \quad \text{»} \quad \begin{cases} 4q & q \geqq 0, \\ 4q-2 & q \geqq 1; \end{cases} \\ \gamma \quad \text{»} \quad \begin{cases} 6r & r \geqq 0, \\ 6r-3 & r \geqq 1. \end{cases} \end{cases}$$

Pour qu'un produit de trois cosinus donne, une fois développé, un terme en cos, il faut que les coefficients α, β, γ satisfassent l'une des 7 égalités suivantes :

$$(6)\quad \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=1, \\ \alpha+\beta-\gamma=\pm 1, \\ \alpha-\beta-\gamma=\pm 1, \\ \alpha-\beta+\gamma=\pm 1. \end{cases}$$

Comme d'après (5), β est toujours un entier pair, il faut que $\alpha \pm \gamma$ soit impair, ce qui conduit à ne rechercher des termes en cos φ que dans les quatre produits suivants provenant de (2) :

$$\sin(a_1\lambda\cos\varphi)\sin(a_2\lambda\cos 2\varphi)\cos(a_3\lambda\cos 3\varphi),$$
$$\cos(a_1\lambda\cos\varphi)\sin(a_2\lambda\cos 2\varphi)\sin(a_3\lambda\cos 3\varphi),$$
$$\sin(a_1\lambda\cos\varphi)\cos(a_2\lambda\cos 2\varphi)\cos(a_3\lambda\cos 3\varphi),$$
$$\cos(a_1\lambda\cos\varphi)\cos(a_2\lambda\cos 2\varphi)\sin(a_3\lambda\cos 3\varphi).$$

D'autre part le coefficient a_3 [qui est égal à $\frac{\mu^3}{8}$ d'après la formule (10) de l'Annexe I] est très petit. Par suite l'argument $a_3\lambda$ des fonctions de Bessel figurant dans le développement de $\sin(a_3\lambda\cos 3\varphi)$ et de $\cos(a_3\lambda\cos 3\varphi)$ est petit et l'on peut considérer que [1]

$$\cos(a_3\lambda\cos 3\varphi)\sim J_0(a_3\lambda),$$
$$\sin(a_3\lambda\cos 3\varphi)\sim F_1\cos 3\varphi=2J_1(a_3\lambda)\cos 3\varphi.$$

Par suite, le nombre entier γ des formules (6) ne pourra prendre, selon les cas, que les valeurs 0 ou 3.

Termes en cos φ provenant de

$$\sin(a_1\lambda\cos\varphi)\sin(a_2\lambda\cos 2\varphi)\cos(a_3\lambda\cos 3\varphi).$$

Dans ce cas,

$$\alpha=2p-1,\qquad \beta=4q-1,\qquad \gamma=0,$$

et les 7 égalités (6) s'écrivent

$$\alpha+\beta=1,\qquad \alpha+\beta=1,\qquad \alpha+\beta=-1,$$
$$\alpha-\beta=1,\qquad \alpha-\beta=1,\qquad \alpha-\beta=-1,\qquad \alpha-\beta=-1;$$

[1] La validité de cette approximation sera discutée un peu plus loin.

soit

$$p+2q=2,\qquad p+2q=2,\qquad p+2q=1,$$
$$p-2q=0,\quad p-2q=0,\quad p-2q=-1,\quad p-2q=-1$$
$$\text{avec}\quad p\geqq 1,\qquad q\geqq 1.$$

Les 3 premières de ces égalités ne peuvent être vérifiées. Les 4 autres donnent

$$\left.\begin{matrix} p=2q \\ p=2q-1 \end{matrix}\right\}\ \text{répétées deux fois.}$$

Donc le terme en cos φ de

$$\sin(a_1\lambda\cos\varphi)\sin(a_2\lambda\cos 2\varphi)\cos(a_3\lambda\cos 3\varphi)$$

a pour coefficient

$$(7)\quad K_1=2\times\frac{1}{4}J_0(a_3\lambda)\sum_{q=1}^{\infty}E_{2q-1}(D_{4q-2}+D_{4q-1}).$$

Termes en cos φ provenant des autres produits.

Par le même procédé on trouve que les coefficients des termes en cos φ des produits

$$\cos(a_1\lambda\cos\varphi)\sin(a_2\lambda\cos 2\varphi)\sin(a_3\lambda\cos 3\varphi),$$
$$\sin(a_1\lambda\cos\varphi)\cos(a_2\lambda\cos 2\varphi)\cos(a_3\lambda\cos 3\varphi),$$
$$\cos(a_1\lambda\cos\varphi)\cos(a_2\lambda\cos 2\varphi)\sin(a_3\lambda\cos 3\varphi)$$

ont respectivement pour expression

$$(8)\quad K_2=2\times\frac{1}{4}J_1(a_3\lambda)\Big\{E_1[2J_0(a_1\lambda)+A_2+A_4+A_6)] + \sum_{q=2}^{\infty}E_{2q-1}(A_{4q-6}+A_{4q-4}+A_{4q}+A_{4q+2})\Big\},$$

$$(9)\quad K_3=2\times\frac{1}{4}J_0(a_3\lambda)\Big\{\sum_{q=1}^{\infty}B_{2q}(D_{4q-1}+D_{4q+1}) + 2J_0(a_2\lambda)D_1\Big\},$$

$$(10)\quad K_4=2\times\frac{1}{4}J_1(a_3\lambda)\Big\{4J_0(a_1\lambda)J_0(a_2\lambda)+2A_2J_0(a_2\lambda) + \sum_{q=1}^{\infty}B_{2q}(A_{4q-2}+2A_{2q}+A_{4q+2})\Big\}$$

[A_n, B_n, D_n, E_n sont définis par (3)].

Expression du rendement η_0.

On a

$$\eta_0=2\mu\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\left(\varphi-\lambda\sqrt{1+2\mu\cos\varphi}\right)d\varphi$$

et, par suite,

$$\eta_0=2\mu I=2\mu\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Y\cos\varphi\,d\varphi=2\mu\frac{n_1}{2}.$$

D'après la valeur (2) de Y, η_0 a pour expression

$$(11)\quad \eta_0 = -2\mu\left[\frac{K_1+K_2}{2}\cos a_0\lambda + \frac{K_3+K_4}{2}\sin a_0\lambda\right].$$

[Dans cette formule, on doit remarquer que K_2 et K_4, contenant $J_1(a_3\lambda)$ en facteur, sont petits par rapport à K_1 et K_3].

Validité de l'expression réduite de η_0.

Pour établir les formules donnant K_1, K_2, K_3 et K_4, nous avons admis qu'étant donnée la petitesse de $a_3 \sim \frac{\mu^3}{8}$, on a

$$\cos(a_3\lambda\cos 3\varphi) \sim J_0(a_3\lambda),$$
$$\sin(a_3\lambda\cos 3\varphi) \sim 2J_1(a_3\lambda)\cos 3\varphi.$$

Ceci suppose que l'on puisse négliger $2J_2(a_3\lambda)$ et les coefficients d'indices plus élevés et impose, par suite, à λ une limite supérieure pour que η_0 soit donné par (11) avec une certaine précision.

Nous allons rechercher cette limite supérieure de λ de telle sorte que la formule (11) donne η_0 avec 3 décimales (à 1/10e pour cent près) et ceci pour $\mu \leq 0{,}25$.

Dans ces conditions, il suffit que le terme négligé $2J_2(a_3\lambda)$ qui n'entrerait dans η_0 que multiplié par plusieurs facteurs, tous inférieurs à l'unité, soit inférieur à 1/100e, soit

$$2J_2(a_3\lambda) < 0{,}01,$$

ou, en prenant le premier terme du développement en série

$$\left(\frac{\mu^3\lambda}{16}\right)^2 < 0{,}01 \qquad \text{avec} \quad \mu \leq \frac{1}{4},$$

d'où $\lambda < 102$ radians ou environ $\lambda < 33\pi$.

D'autre part, lorsque $\lambda = 100$ radians et que $\mu = \frac{1}{4}$, $J_4(a_2\lambda)$ est de l'ordre de 1/100e, par suite, on peut négliger, dans les coefficients K_1, K_2, K_3 et K_4 les coefficients de Bessel de l'ordre de $J_4(a_2\lambda)$ et d'ordre supérieur et, par suite, ne conserver dans ceux-ci que B_2, E_1 et E_3.

Dans ces conditions,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{K_1}{2} &\sim J_0(a_3\lambda)\Big\{ J_1(a_2\lambda)[J_1(a_1\lambda) - J_3(a_1\lambda)] \\
&\qquad - J_3(a_2\lambda)[J_5(a_1\lambda) - J_7(a_1\lambda)]\Big\}, \\
\frac{K_2}{2} &\sim J_1(a_3\lambda)J_1(a_2\lambda)[\ J_0(a_1\lambda) - J_2(a_1\lambda) \\
&\qquad + J_4(a_1\lambda) - J_6(a_1\lambda)], \\
\frac{K_3}{2} &\sim J_0(a_3\lambda)\Big\{J_0(a_2\lambda)J_1(a_1\lambda) + J_2(a_2\lambda) \\
&\qquad \times [J_3(a_1\lambda) - J_5(a_1\lambda)]\Big\}, \\
\frac{K_4}{2} &\sim J_1(a_3\lambda)J_0(a_2\lambda)[J_0(a_1\lambda) - J_2(a_1\lambda)].
\end{aligned}\right.$$

Les formules (11) et (12) permettent donc de calculer η_0 avec 3 décimales lorsque $\lambda < 100$ radians (ou 33π) et pour les valeurs de μ telles qu'il n'y ait pas réflexion d'électrons par le champ de haute fréquence.

ANNEXE III.

Calcul de

$$I' = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\varphi + \lambda\sqrt{1 + 2\mu\sin\varphi}\right) d\varphi.$$

Le développement en série de Fourier de $\sqrt{1 + 2\mu\sin\varphi}$ s'obtient à partir du développement de $\sqrt{1 + 2\mu\cos\varphi}$ (*voir* Annexe I) en changeant φ en $\frac{\pi}{2} - \varphi$, d'où

$$\sqrt{1 + 2\mu\sin\varphi} = a_0 + a_1\sin\varphi - a_2\cos 2\varphi + \ldots,$$

où les coefficients a_0, a_1, a_2, ... sont donnés par les formules (10) de l'Annexe I.

Nous supposons ici que μ est suffisamment petit pour que $a_3 \sim \frac{\mu^3}{8}$ soit négligeable, et, par suite, l'élément différentiel de I' est

$$\begin{aligned}
&\sin(\varphi - a_0\lambda - a_1\sin\varphi + a_2\lambda\cos 2\varphi) \\
&\quad = \sin(\varphi - a_0\lambda + a_2\lambda\cos 2\varphi)\cos(a_1\lambda\sin\varphi) \\
&\qquad - \cos(\varphi - a_0\lambda + a_2\lambda\cos 2\varphi)\sin(a_1\lambda\sin\varphi).
\end{aligned}$$

Dans la suite, nous supposerons, en outre, que $a_2\lambda \sim -\frac{\mu^2}{4}\lambda$ est suffisamment petit pour que

$$\cos(a_2\lambda\cos 2\varphi) \sim J_0(a_2\lambda),$$
$$\sin(a_2\lambda\cos 2\varphi) \sim 2J_1(a_2\lambda)\cos 2\varphi$$

[ceci revient à négliger $2J_2(a_2\lambda)$ et les coefficients d'ordre supérieur]. Dans ces conditions, l'élément différentiel de I' peut s'écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&+ \sin a_0\lambda\Big\{ [2J_1(a_2\lambda)\sin\varphi\cos 2\varphi \\
&\qquad - J_0(a_2\lambda)\cos\varphi]\cos(a_1\lambda\sin\varphi) \\
&\qquad - [2J_1(a_2\lambda)\cos\varphi\cos 2\varphi \\
&\qquad + J_0(a_2\lambda)\sin\varphi]\sin(a_1\lambda\sin\varphi)\Big\}, \\
&+ \cos a_0\lambda\Big\{ [2J_1(a_2\lambda)\cos\varphi\cos 2\varphi \\
&\qquad + J_0(a_2\lambda)\sin\varphi]\cos(a_1\lambda\sin\varphi) \\
&\qquad + [2J_1(a_2\lambda)\sin\varphi\cos 2\varphi \\
&\qquad - J_0(a_2\lambda)\cos\varphi]\sin(a_1\lambda\sin\varphi)\Big\}.
\end{aligned}\right.$$

Or, $\cos(a_1\lambda\sin\varphi)$ ou $\sin(a_1\lambda\sin\varphi)$ ont des valeurs égales pour deux valeurs de φ symétriques

par rapport à $\frac{\pi}{2}$ et, par suite, seuls donneront un résultat non nul dans l'intégration de o à π les termes de (1) qui ne s'annuleront pas pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, soit

$$\begin{aligned}&[2J_1(a_2\lambda)\sin a_0\lambda\sin\varphi\cos 2\varphi\\&\qquad + J_0(a_2\lambda)\cos a_0\lambda\sin\varphi]\cos(a_1\lambda\sin\varphi)\\&+[2J_1(a_2\lambda)\cos a_0\lambda\sin\varphi\cos 2\varphi\\&\qquad - J_0(a_2\lambda)\sin a_0\lambda\sin\varphi]\sin(a_1\lambda\sin\varphi).\end{aligned}$$

Comme

$$2\sin\varphi\cos 2\varphi = \sin 3\varphi - \sin\varphi,$$

nous avons

$$I' = I'_1 + I'_2 + I'_3 + I'_4$$

avec

$$I'_1 = J_1(a_2\lambda)\sin a_0\lambda\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 3\varphi\cos(a_1\lambda\sin\varphi)\,d\varphi,$$

$$I'_2 = [J_0(a_2\lambda)\cos a_0\lambda - J_1(a_2\lambda)\sin a_0\lambda]\times\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\varphi\cos(a_1\lambda\sin\varphi)\,d\varphi,$$

$$I'_3 = J_1(a_2\lambda)\cos a_0\lambda\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 3\varphi\sin(a_1\lambda\sin\varphi)\,d\varphi,$$

$$I'_4 = -[J_0(a_2\lambda)\sin a_0\lambda + J_1(a_2\lambda)\cos a_0\lambda]\times\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\varphi\sin(a_1\lambda\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Or,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\varphi\sin(a_1\lambda\sin\varphi)\,d\varphi\\&= +\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(a_1\lambda\sin\varphi - \varphi)\,d\varphi = J_1(a_1\lambda),\\&\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 3\varphi\sin(a_1\lambda\sin\varphi)\,d\varphi\\&= +\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(a_1\lambda\sin\varphi - 3\varphi)\,d\varphi = J_3(a_1\lambda).\\&\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\varphi\cos(a_1\lambda\sin\varphi)\,d\varphi\\&= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(a_1\lambda\sin\varphi - \varphi)\,d\varphi = -\Omega_1(a_1\lambda),\\&\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 3\varphi\cos(a_1\lambda\sin\varphi)\,d\varphi\\&= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(a_1\lambda\sin\varphi - 3\varphi)\,d\varphi = -\Omega_3(a_1\lambda).\end{aligned}$$

où J_1 et J_3 sont les fonctions de Bessel de première espèce (d'ordre 1 et 3). Ω_1 et Ω_3 sont les fonctions de Lommel-Weber d'ordre 1 et 3 [1].

Par suite, I' a pour expression

$$\begin{aligned}(2)\quad I' = \Big\{&\sin a_0\lambda\big[-J_0(a_2\lambda)J_1(a_1\lambda) + J_1(a_2\lambda)\\&\qquad\times[\Omega_1(a_1\lambda) - \Omega_3(a_1\lambda)]\big]\\&+\cos a_0\lambda\big[-J_0(a_2\lambda)\Omega_1(a_1\lambda) - J_1(a_2\lambda)\\&\qquad\times[J_1(a_1\lambda) - J_3(a_1\lambda)]\big]\Big\}.\end{aligned}$$

[1] *Voir* JAHNKE-EMDE, *Tables de fonctions*, p. 211.

UTILITÉ DES EXAMENS RADIOCRISTALLOGRAPHIQUES DANS L'INDUSTRIE DES TUBES A VIDE

PAR NGUYEN THIEN-CHI,

Ingénieur au Laboratoire de Recherches physico-chimiques
de la Compagnie Générale de Télégraphie sans fil.

SOMMAIRE. — *L'auteur décrit brièvement l'installation dont il dispose tant pour des recherches de laboratoire que pour des examens de contrôle. Il cite, avec clichés à l'appui, des exemples choisis parmi les nombreux travaux exécutés. Chacun d'eux ayant fait l'objet d'une étude particulière, il ne peut qu'en rappeler l'essentiel dans le présent exposé, sans s'attarder aux détails ; aussi bien s'est-il simplement proposé de donner une idée des multiples services que l'industrie des tubes à vide peut attendre de la radiocristallographie.*

L'industrie des tubes à vide utilise une grande variété de matériaux comprenant des métaux communs tels que le fer, le cuivre, le nickel; des métaux spéciaux comme le tungstène, le molybdène, le tantale, le zirconium; des isolants céramiques généralement doués de propriétés très particulières; des poudres minérales parmi lesquelles les carbonates alcalino-terreux, l'alumine, la magnésie, la silice, les substances luminescentes synthétiques, etc. Tous ces matériaux doivent présenter des caractéristiques mécaniques, physiques, chimiques bien définies et constantes, comme l'exigent la précision des montages et l'extrême délicatesse des phénomènes mis en jeu dans les tubes à vide. Des cas anormaux se présentent souvent qu'il faut élucider rapidement. L'expérience a montré que le contrôle chimique, complété au besoin par la spectrographie, est fréquemment impuissant à trancher une question épineuse. Ces deux techniques n'identifient que les éléments d'un corps, non son espèce minérale; on trouvera pour une substance la formule SiO_2 — au prix de quelle peine ! — sans savoir si elle est silice amorphe, quartz, cristobalite ou tridymite. Les propriétés d'un corps ne dépendent pas uniquement de sa composition; la structure cristalline, la texture consécutive à des traitements mécaniques, etc., sont des facteurs importants que seule peut révéler l'analyse aux rayons X. Si la radiocristallographie n'occupe pas encore dans les usines la place qu'elle mérite, cela tient à la chèreté de l'installation, à la nécessité d'avoir un personnel spécialisé, et aussi, dans une certaine mesure, à l'ignorance des multiples possibilités des rayons X.

On se propose de mettre en lumière, par des exemples, les services qu'on est en droit d'attendre de la radiocristallographie dans une usine de tubes à vide, surtout lorsque celle-ci procède elle-même à la mise au point et à la fabrication de certaines matières premières (céramiques, métaux en poudre, carbonates alcalinoterreux, etc.).

On passera sous silence les examens radioscopiques qui sont pratiqués d'une façon routinière pour déceler des défauts de montage dans certaines lampes.

Installation.

Le tube est du modèle démontable vertical, à cinq fenêtres amovibles, vidé par un groupe comprenant une pompe à palettes, une pompe à mercure et une pompe à vapeur d'huile. On mesure le vide au moyen d'une jauge à ionisation également démontable adaptée au tube par joint étanche. Le générateur à tension constante peut fournir 90 kV et 20 mA : c'est un bloc entièrement dans l'huile, commandé à distance par un pupitre qui permet de régler la tension et le débit du tube. On travaille généralement en anode de cuivre, mais on dispose aussi d'anticathodes de molybdène, fer, chrome et cobalt.

Un relais de protection déclenche la haute tension dès que l'intensité dépasse une valeur dangereuse;

un autre dispositif de sécurité avec avertisseur prévient d'une baisse de pression dans la canalisation d'eau ou d'une coupure de chaufferette de pompe.

Cette installation, fournie par la Compagnie Générale de Radiologie, est robuste bien qu'assez encombrante; elle fonctionne sans autres arrêts que ceux nécessités par les remplacements de filaments. La figure 1 en montre une vue d'ensemble.

Méthodes employées.

Le tube ayant un large foyer ne se prête pas à l'emploi du monochromateur en quartz recourbé qui seul permet de déceler la diffusion centrale dont dépendent l'étude de la forme et de la dimension des particules submicroscopiques et celle de petites hétérogénéités dans les solutions solides. Ces études délicates ne seront possibles qu'en adaptant à la cathode le dispositif de concentration préconisé par M. Guinier pour obtenir un foyer fin.

Jusqu'à présent on a employé exclusivement la méthode de Debye-Scherrer et ses variantes en raison de la nature polycristalline de tous les échantillons à étudier.

Pour des diagrammes d'identification courante, on dispose d'une chambre Debye - Scherrer de 76,5 mm de diamètre, qui se prête également aux mesures de mailles d'une précision moyenne, en utilisant les raies les plus lointaines. Mais dès qu'il s'agit de mesures très précises, on a recours à une chambre de réflexion en retour ou à une chambre de focalisation symétrique basée sur le principe de Seeman-Bohlin, toutes deux construites au Laboratoire. Les trois appareils sont représentés sur la figure 2.

Les principes de ces trois méthodes et leurs possibilités ont été exposés en détail dans un article antérieur [1]; on n'y reviendra pas ici et l'on se bornera à passer en revue des exemples dans lesquels on a employé ces diverses techniques.

Nature des travaux.

Les travaux effectués au Laboratoire comprennent principalement des identifications, des examens de texture cristalline (structure fibreuse et recristallisation), des comparaisons de grosseur de cristaux, des études de transformations allotropiques, des mesures précises de paramètres cristallins, etc., ces diverses rubriques englobant à la fois les métaux et les substances céramiques.

Le travail le plus courant consiste à identifier une substance d'après son diagramme Debye-Scherrer formé de raies dont les positions et les intensités relatives sont caractéristiques de la variété cristalline que l'on étudie : on connaît du même coup et la nature chimique du corps et sa structure.

Une identification est avant tout une affaire d'habitude. Il est des clichés qu'on reconnaît du premier coup d'œil, parce qu'on les a vus plusieurs fois : tungstène, nickel, quartz, corindon, etc. Pour être définitivement fixé, il reste à les comparer avec des diagrammes de référence dont un laboratoire possède toujours un certain nombre dans ses archives. Mais très souvent, un cliché ne rappelle rien; la nature du problème à résoudre permet alors de limiter les tâtonnements. S'il s'agit par exemple du revêtement d'une cathode à oxydes, on pense immédiatement aux carbonates alcalino-terreux (on reviendra plus loin en détail sur cette question intéressante). Si l'on dispose de diagrammes de comparaison, l'identification est immédiate. Sinon, il faut pointer le cliché pour déterminer les intervalles réticulaires et les intensités relatives des raies, puis se reporter à l'atlas de raies d'Hanawalt [2] (qui groupe des données relatives à mille corps différents) pour essayer d'identifier le corps inconnu avec l'une des substances jugées possibles. Remarquons que la méthode d'Hanawalt proprement dite, qui permet d'identifier un corps par ses trois raies les plus importantes, n'est applicable que si l'on dispose d'un registre où toutes les raies sont classées en groupes et sous-groupes suivant les valeurs des intervalles réticulaires correspondants. Et même, dans ce cas, il faudra encore obtenir les diagrammes dans les mêmes conditions matérielles qu'Hanawalt (même radiation, même forme d'échantillon, etc.). L'identification d'un mélange de deux substances, déjà difficile avec la méthode d'Hanawalt, est pratiquement impossible par comparaison ou par pointés, à moins de disposer de données supplémentaires particulièrement favorables. Des exemples vont illustrer ces considérations générales.

1er Exemple. — *Filament chauffant d'une lampe.* — En prenant le filament lui-même comme échantillon, on reconnaît immédiatement qu'il est en tungstène recouvert d'alumine à structure de corindon (*fig.* 3). De plus, le métal a recristallisé et il a gardé sa structure fibreuse; l'alumine, par suite du frittage, se présente en gros grains.

2e Exemple. — *Carburation de filaments de tungstène.* — On carbure un filament de tungstène thorié en le chauffant à une température convenable dans une atmosphère d'hydrocarbure (benzène

ou naphtalène). L'hydrocarbure se décompose au contact du filament qui retient le carbone. La thorine est réduite à l'état de thorium, mais en même temps il y a combinaison entre W et C avec formation de deux carbures, W_2C et WC, dont la présence augmente la résistance électrique du filament. Si ce dernier est chauffé sous tension constante, le rapport entre le courant initial et le courant final, appelé « taux de carburation », constitue dans la pratique un moyen de contrôle de l'opération. Mais plusieurs filaments présentant le même « taux » ne se sont pas généralement carburés de la même façon, en ce sens que la formation des carbures W_2C et WC est loin d'y être identique d'un échantillon à l'autre. On le voit nettement sur les clichés de la figure 4 qui montrent la coexistence en proportions variées des deux carbures.

3e Exemple. — *Poudre de tungstène incomplètement réduite.* — La poudre de tungstène destinée à la fabrication des filaments de lampes est obtenu par réduction de WO_3. Sur un échantillon mal réduit, on décèle la présence de WO_3 qui subsiste par ses raies les plus fortes (*fig.* 5).

4e Exemple. — *Carbonates alcalino-terreux pour revêtement de cathodes à oxydes.* — Le produit dont on enduit les cathodes s'obtient en précipitant simultanément de leurs nitrates CO_3Ba et CO_3Sr au moyen de carbonate d'ammonium. Les proportions sont calculées pour que le précipité final contienne 50 % en poids de chacun des carbonates. Il est naturel de se demander si ce dernier est un simple mélange des deux constituants ou si, au contraire, il est un carbonate mixte. La seconde hypothèse a toutes les chances de se réaliser, parce que CO_3Ba et CO_3Sr sont isomorphes avec des paramètres voisins et qu'ils ont été précipités à chaud simultanément. En effet, les diagrammes Debye-Scherrer montrent que le carbonate mixte a la même structure orthorhombique que CO_3Ba et CO_3Sr, avec des raies intermédiaires entre celles de ces deux derniers (*fig.* 6). Il apparaît d'une manière frappante que ses raies (cliché *b*) sont floues, en sorte que les groupes de franges des deux derniers tiers du diagramme ne forment plus que des bandes non résolues qui finissent par devenir très vagues en bout de cliché; dans l'ensemble, les raies sont nettement plus faibles que celles des carbonates simples. Ces apparences, qu'on observe fréquemment chez les cristaux mixtes, s'expliquent par la façon même dont ces derniers prennent naissance : ils résultent de la substitution d'un motif cristallin à un autre, et cela suivant la loi du hasard : la périodicité de cet ensemble formé par la juxtaposition de deux périodes quasi-égales, et dont les paramètres sont statistiquement constants, n'est pas aussi parfaite que celle d'une variété cristalline bien définie.

Les carbonates CO_3Ba et CO_3Sr syncristallisent d'ailleurs en toutes proportions, comme le montre une série de diagrammes relatifs à des carbonates mixtes obtenus en faisant varier les proportions relatives des deux composants.

Lorsque l'enduit de carbonate mixte est chauffé par la cathode lors de sa formation, il se transforme en cristaux mixtes BaO—SrO. On arrive au même résultat en partant d'un mélange $CO_3Ba + CO_3Sr$, mais l'expérience a montré qu'on obtient de meilleurs résultats avec un carbonate mixte préparé comme il a été dit.

5e Exemple. — *Poudres de tungstène et de molybdène destinées aux fabrications radioélectriques.* — On a souvent à les distinguer l'une de l'autre au Laboratoire où l'on possède beaucoup d'échantillons. La chambre Debye-Scherrer ne permet pas de conclure avec certitude en raison de la quasi-identité des diagrammes de W et de M_o. Grâce à sa dispersion élevée, la chambre de focalisation symétrique rend la distinction très facile par une mesure précise de paramètres cristallins (*fig.* 7). Celle-ci peut être regardée comme un moyen de contrôle intéressant de l'élaboration des poudres. On trouve en moyenne :

pour W, $a = 3,157_9 \pm 0,0004$ Å ;
pour M_o, $a = 3,139_8 \pm 0,0002$ Å.

6e Exemple. — *Substances luminescentes pour oscillographes cathodiques.* — On a examiné sept échantillons différant les uns des autres par la couleur de l'émission (bleu, vert, jaune) et la persistance, et l'on a trouvé qu'ils sont tous des sulfures de zinc ou zinc-cadmium. Un seul a la structure de la blende ou ZnS cubique (*fig.* 8 *a*) qu'on a reconnue par comparaison avec une blende du Muséum. Tous les autres montrent la structure de la würtzite, ou ZnS hexagonal (*fig.* 8 *b*); n'ayant pas de diagramme de würtzite, on les a identifiés au moyen des tables d'Hanawalt. Parmi eux, deux étant à luminescence jaune doivent contenir du cadmium; en effet des clichés par réflexion en retour révèlent la présence de cristaux mixtes ZnS.CdS qui se manifestent par des raies intermédiaires entre celles de ZnS et CdS hexagonaux. Si l'on disposait d'une courbe d'étalonnage, on pourrait déterminer les proportions des deux

composants par une simple mesure de maille. Une analyse spectrographique a d'ailleurs confirmé et complété les résultats précédents.

Dans le cas actuel, l'analyse radiographique est bien plus rapide et plus élégante qu'une analyse chimique : elle a permis, en quelques heures de pose, d'identifier sept substances inconnues. Le fait que ces corps, de même origine mais destinés aux usages les plus variés et en particulier à la télévision, sont tous des sulfures, montre la tendance actuelle de l'industrie des produits luminescents. Les sulfures, quoique difficiles à préparer et à stabiliser, ont cependant le gros avantage d'un rendement lumineux élevé. La distinction des échantillons en deux variétés cristallines, blende et würtzite, constitue une indication supplémentaire sur la température de cuisson (facteur très important dans l'élaboration des phosphores), puisque, selon Güntz, la température de transformation est d'environ 1 020° C, la blende étant stable en dessous de cette limite.

7e Exemple. — *Tungstates de calcium luminescents* (*fig.* 9). — Ces substances, destinées à la confection d'écrans d'oscillographes à luminescence bleue, ont été obtenues de diverses manières, mais l'on constate qu'elles ont toutes la structure de la scheelite WO_4Ca (échantillon du Muséum, cliché *a*). Une première façon consiste à partir de tungstate précipité pur du commerce (cliché *b*) et à le calciner avec du NaCl pour obtenir un produit bien cristallisé (cliché *c*). La comparaison des deux diagrammes précédents est intéressante en ce qu'elle met en évidence l'action de la cuisson sur la cristallisation : sur *b*, les raies lointaines sont faibles et floues, alors qu'elles sont fortes et fines sur *c*, et les toutes dernières montrent très nettement la séparation du doublet $K\alpha$ du cuivre. Un second procédé consiste à calciner un mélange $WO_3 + CO_3Ca$ en proportions convenables : le produit obtenu (cliché *d*) est encore mieux cristallisé que le précédent, mais les cristaux sont volumineux comme le montre le diagramme *e* à échantillon fixe (raies piquetées), et l'on a dû procéder à un broyage pour rendre le tungstate apte à être déposé en couche unie sur l'écran.

8e Exemple. — *Silice pulvérulente.* — Cette silice, destinée aux fabrications céramiques, a été prise pour du quartz; en réalité c'est de la silice amorphe, dont le diagramme montre un large halo situé entre les deux raies les plus intenses du quartz (*fig.* 10).

9e Exemple. — *Examen d'une argile pour fabrications céramiques.* — Le diagramme Debye-Scherrer décèle immédiatement la présence de quartz, dont on a cherché à se débarrasser par sédimentation d'une suspension d'argile dans l'eau. De temps à autre, on prélève une prise qu'on évapore à sec pour en examiner le dépôt; on voit les raies du quartz faiblir progressivement à mesure que la sédimentation se poursuit. C'est ce qui apparaît clairement sur la série de clichés *b*, *c*, *d*, *e*, *f* de la figure 11, *a* étant le diagramme du quartz. Le cliché *f* relatif à une prise faite après 15 h de sédimentation ne montre pratiquement plus de quartz.

La substance argileuse proprement dite est de la kaolinite.

10e Exemple. — *Examen d'un talc pour céramiques.* — On est en présence d'un exemple d'identification intéressante parce que rapide. L'échantillon ayant un toucher sec et dur a dû être calciné (fritté). On sait que dans ce cas le talc (dont la composition est intermédiaire entre $3MgO.4\,SiO_2.H_2O$ et $4MgO.5\,SiO_2.H_2O$) perd son eau en donnant naissance à de la clinoenstatite $SiO_2.MgO$ et de la silice. On a reconnu la clinoenstatite grâce à l'atlas d'Hanawalt; la silice libre était de la cristobalite α reconnaissable à sa raie la plus intense ($d = 4{,}04$ Å) (*fig.* 12).

11e Exemple. — *Tranformation du dioxyde de titane (influence de la température, du temps, de la pression).* — On utilise de plus en plus le dioxyde de titane sous forme de rutile dans la fabrication de produits céramiques spéciaux pour usages radioélectriques à cause de sa constante diélectrique élevée (110 environ pour une masse polycristalline) et des pertes diélectriques très faibles qu'il permet d'obtenir, soit seul, soit incorporé à d'autres substances céramiques.

L'oxyde TiO_2 se présente sous trois formes cristallines : anatase (quadratique), brookite (orthorhombique), et rutile (quadratique), la brookite étant la variété la plus rare. La matière première employée est toujours de l'anatase en poudre blanche que la cuisson transforme en rutile, seul recherché pour ses propriétés spéciales. Il est donc intéressant d'étudier le passage d'une variété à l'autre en fonction de la température et de la durée de cuisson, de la pression de moulage, de la pureté de l'oxyde (c'est-à-dire de sa provenance). On se bornera ici à relater quelques observations.

A. *Influence de la température.* — L'oxyde étudié a été obtenu à partir du trichlorure de titane par précipitation à froid avec l'ammoniaque. Ce précipité ne produit aucune raie aux rayons X, même

après un étuvage de 6 h à 110°C. Des échantillons ont été chauffés à différentes températures, puis examinés; les diagrammes sont représentés sur la figure 13, et les résultats consignés dans le Tableau I.

TABLEAU I.

Désignation des clichés.	Température de cuisson.	Durée de cuisson.	Variétés cristallines présentes.
	°C	h	
a	190	6	Anatase
b	300	1	»
c	500	1	»
d	700	1	»
e	800	1	»
f	900	m 0 30	Anatase + traces de rutile
g	900	1	Rutile + traces d'anatase
h	100	1	Rutile

Sur le cliché *a*, on voit la raie la plus forte de l'anatase et quatre autres très faibles. A mesure que la température de cuisson croît, les raies deviennent plus nombreuses et plus nettes. A 700°C (cliché *d*), l'anatase montre toutes ses raies, mais encore un peu floues, et il faut atteindre 800° pour les voir bien nettes (cliché *e*). La comparaison des diagrammes *f* et *g* est intéressante; sur *f* apparaît déjà la raie la plus intense du rutile, tandis que sur *g* subsiste encore la principale raie de l'anatase. Pour arriver à une transformation complète, on doit chauffer à 900° pendant 1 h 30 min.

B. *Influence de la durée de cuisson.* — On a opéré sur des disques de 1 g et de 1 cm² de section moulés sous 7 t avec un liant organique; la petitesse de leurs dimensions assurait une meilleure transmission de la pression. Ces pastilles ont été calcinées à 850° pendant 30 min, 5, 7, 9, 16 et 18 h. Il y correspond respectivement les clichés *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* de la figure 14. On y observe le passage graduel de l'anatase au rutile. Une trace de rutile sur *a* et une trace d'anatase sur *e* ne sont pas visibles sur les clichés reproduits.

C. *Influence de la pression.* — Une augmentation de la pression de moulage, en rendant plus intime le contact entre grains, doit favoriser la transformation d'une variété cristalline dans l'autre. C'est bien ce que montrent les diagrammes de la figure 15; les échantillons ont été calcinés simultanément à 850° pendant 18 h, le cliché *a* correspondant à de l'anatase non comprimée, *b* à une pastille pressée à 1 *T*/cm² et *c* à une pastille moulée à 7 *T*/cm². Cette dernière ne contient que du rutile, alors que *b* montre un mélange de rutile et d'anatase.

L'anatase employée dans les expériences B et C est un produit pur du commerce qui entre dans la composition de nos pièces céramiques courantes.

Texture cristalline.

Les exemples cités sous cette rubrique ont trait à l'arrangement des cristaux dans les métaux consécutif aux traitements mécaniques (tréfilage, laminage) ou thermiques (recuit) subis par les échantillons. Avant de passer aux exemples, on rappellera brièvement quelques notions générales.

Lorsqu'un fil métallique passe à la filière, les cristaux tendent à prendre une orientation privilégiée. Le cas le plus simple est celui où un axe cristallographique déterminé des cristaux s'oriente parallèlement à l'axe du fil; en réalité, le parallélisme n'est jamais parfait et les axes des cristaux sont situés dans un cône centré sur l'axe du fil. Les raies Debye-Scherrer ne sont plus uniformes, mais montrent des maxima d'intensité sous forme de segments plus ou moins allongés suivant que l'orientation privilégiée est plus ou moins parfaite. Les maxima sont réunis entre eux par des portions continues produites par les cristaux ayant gardé leur orientation désordonnée.

Dans des cas plus compliqués, l'orientation privilégiée affecte un axe de certains cristaux et un axe différent d'autres cristaux.

Les particularités précédentes caractérisent ce qu'on appelle une texture fibreuse.

Le laminage provoque également l'orientation privilégiée soit d'un axe, soit d'un plan cristallographiques.

Les traitements mécaniques occasionnent aussi une distorsion des plans cristallins et un écrouissage des couches superficielles. Les raies de diffraction perdent de leur netteté, ce qui se traduit, sur les plus lointaines d'entre elles, par une séparation défectueuse, ou même nulle, du doublet Kα. Un recuit convenable a pour effet de faire disparaître ces particularités en supprimant les tensions existantes. S'il a lieu à une température suffisamment élevée, fonction du degré de déformation mécanique il produit la recristallisation du métal, c'est-à-dire un réarrangement de l'édifice cristallin par formation de nouveaux cristaux aux dépens des anciens.

Les exemples suivants illustreront ces quelques considérations générales.

1re EXEMPLE. — *Examen comparatif de deux fils de tungstène thorié de propriétés mécaniques différentes.* — Les deux fils ont même teneur en thorium (0,75 %) et même diamètre (0,25 mm),

mais sont de provenance différente. L'un, le n° 1, se plie à froid sans difficulté; l'autre, le n° 2, est très cassant. On les a examinés : d'abord tels quels, puis après les avoir diminués par attaque chimique successivement jusqu'aux diamètres de 0,20 et 0,10 mm de manière à déceler leur texture à différentes profondeurs. L'examen des clichés des figures 16 et 17 montre que dans le fil flexible l'orientation privilégiée des cristaux est nettement plus marquée que dans l'échantillon cassant; autrement dit, la structure fibreuse est plus accentuée, sans doute en raison d'une différence dans les modalités de tréfilage. On remarque en outre, sur les deux fils, que l'orientation des cristaux est de plus en plus nette à mesure qu'on se rapproche du centre; le cliché *c* de la figure 16 est caractéristique à cet égard avec des maxima très ramassés séparés par des portions continues très pâles. Ainsi, ce ne sont pas les cristaux superficiels en contact direct avec les bords de la filière qui ont été les plus énergiquement orientés, comme on serait tenté de le croire.

13e Exemple. — *Texture cristalline d'une feuille de nickel.* — L'échantillon est un ruban de nickel de 0,2 mm d'épaisseur destiné à la fabrication de cathodes à oxydes. Pour enregistrer les diagrammes, on s'est servi d'une chambre de focalisation symétrique de 100 mm de diamètre qui a permis d'obtenir les raies les plus lointaines du nickel avec une dispersion très élevée se traduisant par une séparation notable du doublet Kα du cuivre. Sur la figure 18, on voit :

En *a*, le diagramme d'une feuille brute de laminage, avec des raies larges et très floues sur lesquelles le doublet Kα est complètement brouillé; ces apparences sont dues à l'écrouissage de la couche superficielle du métal consécutif au laminage.

En *b*, le diagramme du même échantillon après recuit sous vide à 900° pendant 30 min; toute trace d'écrouissage a disparu; le métal a recristallisé en cristaux uniformément assez fins, et sur les raies devenues fines et nettes, le doublet CuKα est parfaitement résolu.

14e Exemple. — *Pièces en poudre de nickel comprimées.* — Cet exemple, à rapprocher du précédent, est relatif à de petits disques en poudre de nickel comprimés sous 5 T/cm^2. Des clichés en retour pris sur la section droite sont reproduits sur la figure 19 *a* et *b*.

a. Échantillon brut de moulage; les grains de métal sont déformés et écrouis sous l'action du piston, d'où l'aspect flou des anneaux et la séparation à peine discernable du doublet CuKα. Les mêmes particularités s'observent sur des diagrammes relatifs à la surface latérale qui a été écrouie par frottement contre les parois de la matrice.

b. Même échantillon que *a*, mais recuit dans l'hydrogène à 800° pendant 30 min; toute trace d'écrouissage et de distorsion ayant disparu grâce au traitement thermique, les raies sont remarquablement nettes et fines et la résolution du doublet Kα parfaite. Mais il n'y a pas eu recristallisation prononcée : les cristaux sont restés d'une grande finesse.

15e Exemple. — *Fils de nickel pour cathodes à oxydes.* — Les impuretés contenues dans le nickel de base, même en faible quantité, exercent une influence notable sur l'émission électronique des cathodes à oxydes. Les diagrammes Debye-Scherrer sur plusieurs fils bruts de tréfilage, de même diamètre, mais constitués de nickels différents, sont tous identiques. Les différences se manifestent après un recuit à 1 000°C sous vide pendant 30 min, qui a provoqué la recristallisation du métal; celle-ci très sensible à la présence d'impuretés, a été plus ou moins accentuée suivant la nature du nickel. Sur la figure 20, les clichés *a*, *b*, *c*, *d* correspondent respectivement à un fil brut (texture fibreuse peu marquée) et à trois fils recuits rangés dans l'ordre de grosseur croissante des cristaux. Le cliché *d*, qui est relatif au nickel le plus pur montre une recristallisation particulièrement poussée.

16e Exemple. — *Tiges de molybdène pour montants de grilles.* — Dans les deux exemples qu'on va rappeler, on emploie encore la technique qui consiste à examiner la texture des tiges à différents niveaux en diminuant progressivement son diamètre par attaque chimique et en prenant à chaque stade un diagramme X.

Le premier cas concerne la flexibilité de certains montants que ce défaut rend inutilisables.

Tableau II.

Échantillons.	Désignation des figures.	Diamètre.
Échantillon flexible	*a*	Diamètre initial : 2mm
	b	» réduit à 1mm
	c	» » 0mm,5
	d	Même échantillon que *c*
Échantillon rigide	*a'*	Diamètre initial : 2mm
	b'	» réduit à 1mm
	c'	» » 0mm,5
	d'	Même échantillon que *c'*

Sur la figure 21, on a représenté les clichés *a*, *b*, *c*, *d* relatifs à un échantillon flexible; sur la figure 22, les clichés *a'*, *b'*, *c'*, *d'* se rapportent à une tige rigide (de bonne qualité). La correspondance entre échantillons et diagrammes est mentionnée dans le Tableau II.

L'examen des diagrammes conduit aux remarques suivantes :

1° *Tige flexible* : les cristaux grossissent graduellement de la surface au centre. Au diamètre de 0,5 mm apparaît une texture fibreuse marquée qu'on voit bien sur le diagramme *d* (*fig.* 21).

2° *Tige rigide* : les cristaux sont beaucoup plus fins que dans le cas précédent et de grosseur uniforme sur toute la section de la tige. La texture fibreuse est à peine marquée.

On voit que la rigidité coexiste avec une cristallisation fine et une orientation privilégiée inexistante des cristaux. Par contre, une texture fibreuse bien marquée caractérise une tige flexible, comme on l'a déjà remarqué dans le 12e exemple à propos de la comparaison de deux fils de tungstène thorié.

Un deuxième exemple se rapporte au cintrage des montants de grille quand ils sont portés à température élevée, défaut qui apparaît plus ou moins accentué suivant les échantillons. Cette différence de comportement est liée à une différence de texture cristalline, comme le montrent les figures 23, 24 et 25 qui correspondent respectivement à trois échantillons fortement cintré, moyennement cintré et droit; sur ces figures, les clichés *a* correspondent à la texture superficielle, les clichés *b* à la texture interne (diamètre réduit de 2 à 1 mm). On voit que la tige fortement cintrée possède une structure à très gros cristaux (les anneaux de Debye-Scherrer sont remplacés par des taches de Laue). Le second échantillon montre des cristaux beaucoup moins volumineux et de taille uniforme. Enfin, la tige saine a une structure non homogène, avec de gros cristaux en surface et des cristaux plus fins en profondeur.

Grosseur des cristaux.

L'aspect des raies d'un diagramme dépend de la grosseur des cristaux constituant l'échantillon. Lorsqu'ils sont volumineux, les raies sont parsemées de taches séparées, d'autant plus larges et plus dispersées que les cristaux sont plus gros. Vers 10^{-2} mm, les raies sont continues, et leur largeur croît à mesure qu'augmente la petitesse des particules. D'après la largeur des raies, on peut calculer la dimension des cristaux. Mais les résultats sont généralement sujets à caution, parce que la validité des formules repose sur des conditions qui ne sont qu'approximativement remplies dans beaucoup de cas. Il est clair que cette méthode ne présente pas d'intérêt pour des essais où l'on désire seulement se faire une idée de la grosseur relative des cristaux de différents échantillons. Dans le cas de pièces céramiques, par exemple, on se contentera d'une appréciation qualitative permettant de déterminer l'influence sur une pâte de la température et de la durée de cuisson, de l'incorporation d'additifs, etc. Les échantillons étant des blocs auxquels on peut faire acquérir le cas échéant une facette plane, la méthode de réflexion en retour est tout indiquée. Le schéma de principe, représenté sur la figure 26, montre qu'on enregistre seulement

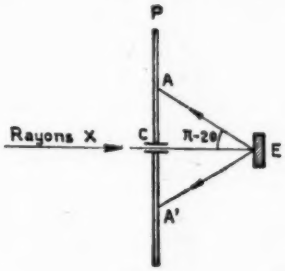


Fig. 26.

les raies correspondant aux plus grands angles de diffraction sous forme d'anneaux continus ou plus ou moins piquetés suivant le nombre et la grosseur des cristaux, ces derniers étant ainsi frappés par le faisceau dans la position même qu'ils occupent dans l'échantillon. On va montrer sur quelques exemples l'intérêt de cette appréciation qualitative (ou semi-quantitative dans des cas favorables) de la grosseur des cristaux.

17e Exemple. — *Cuivres électrolytiques.* — Les cuivres électrolytiques, qui sont utilisés pour certaines pièces de lampes, peuvent être obtenus dans des conditions très variées de bain, de densité de courant, de température, etc., qui influent beaucoup sur le développement des cristaux. On a choisi trois échantillons possédant respectivement une cristallisation fine, moyenne et grossière, qu'on a étudiés à la fois aux rayons X et par examen métallographique. Les diagrammes X en retour et les coupes métallographiques sont représentés sur les figures suivantes :

Figure 27 : échantillon à structure grossière;
Figure 28 : échantillon à structure moyenne;
Figure 29 : échantillon à structure fine.

Un œil même non exercé distingue immédiatement, d'après l'aspect des raies, un cuivre d'un autre quant à la grosseur des cristaux. On remarquera que les deux échantillons à grains fins et à gros grains donnent naissance à des anneaux continus, piquetés de spots, petits et serrés dans le premier, larges et clairsemés dans le second; ils sont donc constitués de cristaux d'une certaine taille noyés parmi des grains nombreux et ténus, c'est ce que ne peuvent montrer les clichés de métallographie où seuls les individus à contour net sont visibles. On observera également que le doublet CuKα est nettement résolu sur tous les diagrammes, ce qui correspond à des échantillons bien cristallisés, sans tension ni distorsion.

Pour obtenir une évaluation quantitative approchée de la dimension des grains, on a compté, pour chaque échantillon, le nombre des cristaux sur la coupe métallographique et celui des spots du grand anneau sur le diagramme X correspondant, et cela sur plusieurs clichés relatifs à chaque cuivre. Le nombre de spots, assez constant pour les échantillons à grains fins et moyens, varie notablement pour le cuivre à structure grossière. Les moyennes de ces dénombrements sont reproduites dans le Tableau III.

TABLEAU III.

Structure.	Nombre	
	de cristaux par mm².	de spots du grand anneau X.
Fine	4 500	130
Moyenne	146	56
Grossière	92	22

18e EXEMPLE. — *Cristallisation d'échantillons céramiques.* — Il est intéressant de suivre aux rayons X le développement des cristaux dans les échantillons céramiques en fonction de la température et de la durée de cuisson, de la pression de moulage, de la nature des additifs ou des liants, etc. La grosseur des cristaux est un facteur important à considérer dans l'étude du retrait, de la porosité, des propriétés mécaniques. De nombreux cas ont été étudiés qu'il serait trop long d'énumérer. On mentionnera seulement un exemple pour mémoire. L'influence des additifs est bien mise en évidence sur la figure 30; le cliché *a* concerne un disque de magnésie pure, et les clichés *b*, *c*, *d*, *e* correspondent à des échantillons de magnésie renfermant respectivement la même teneur de TiO_2, P_2O_5, SIO_2, Al_2O_3, ZnO. Tous les disques ont été moulés sous la même pression et recuits à la même température pendant le même temps. L'ordre dans lequel ils sont énumérés est aussi celui de la finesse croissante des cristaux. Le grossissement de ces derniers est particulièrement favorisé par l'incorporation de TiO_2.

Conclusion.

Les analyses radiocristallographiques sont indispensables dans un laboratoire comme celui des Recherches physico-chimiques de la Compagnie générale de T. S. F., dont l'activité englobe la céramique, la verrerie, la métallurgie, la chimie des substances luminescentes, des matières plastiques, des carbonates émissifs, etc., toutes ces études soulèvent à chaque instant des questions de structure cristalline auxquelles ne sauraient répondre ni la chimie ni la spectrographie. Tout laboratoire moderne devrait pouvoir disposer de ces divers moyens d'investigation, ainsi que de l'analyse électronique (dont il existe d'ailleurs une installation perfectionnée au Laboratoire de Recherches physico-chimiques). La chèreté de l'appareillage et la nécessité d'avoir un personnel spécialisé sont largement compensées par la richesse des possibilités de recherches.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] *Mesures de précision des paramètres cristallins par les rayons X* (*Annales de Radioélectricité*, t. 1, n° 3).

[2] HANAVALT, RINNE et FREVEL, *Ind and Eng. Chem.*, t. 10, 1938, p. 457.

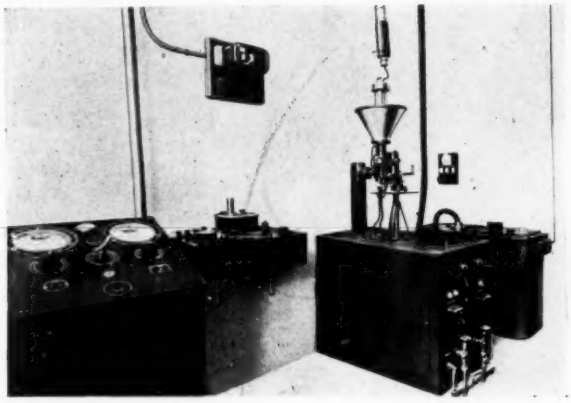


Fig. 1. — Vue d'ensemble de l'installation.

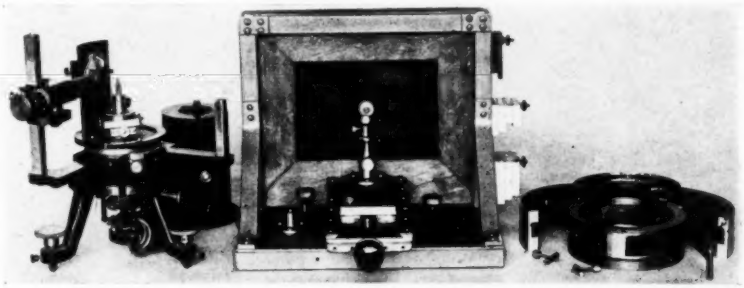


Fig. 2. — Chambres de diffraction.

Fig. 3. — Filament chauffant de cathode.

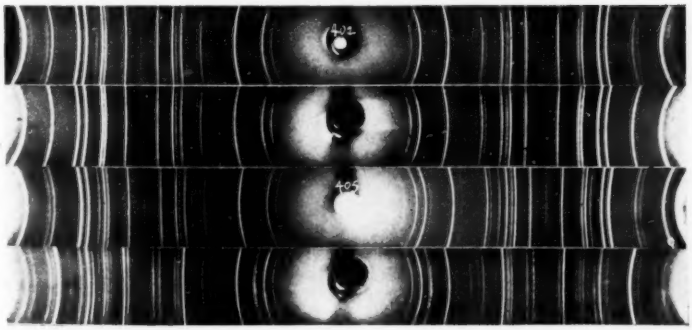


Fig. 4. — Filaments de tungstène carburés. (WC et W_2C en proportions variées.)

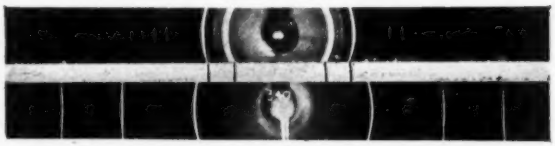
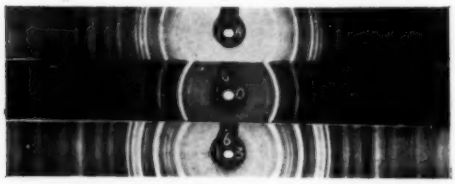


Fig. 5. — Poudre de tungstène incomplètement réduite.



a

b

c

Fig. 6. — Carbonate alcalino-terreux pour cathodes à oxydes.

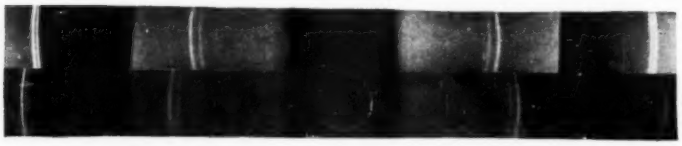
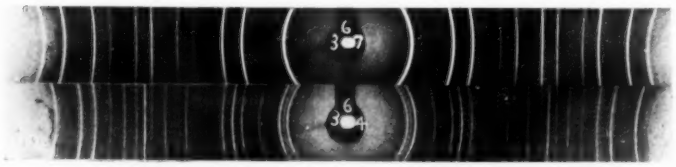


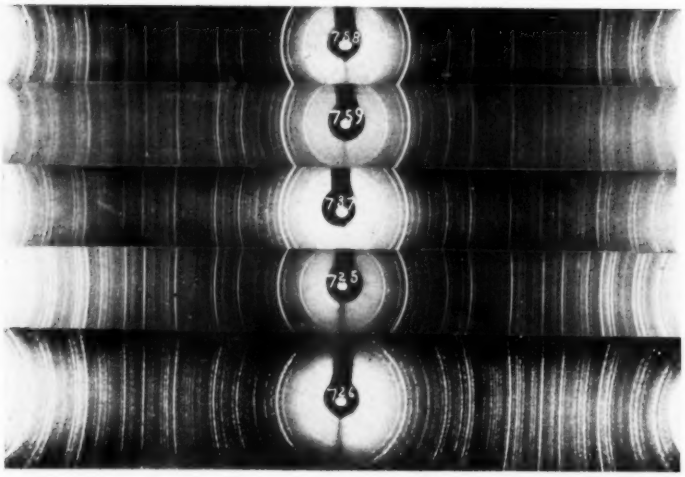
Fig. 7. — Poudres de M_o et W (chambre de précision).



a

b

Fig. 8. — Sulfures de zinc luminescents.



a

b

c

d

e

Fig. 9. — Tungstates de calcium luminescents.

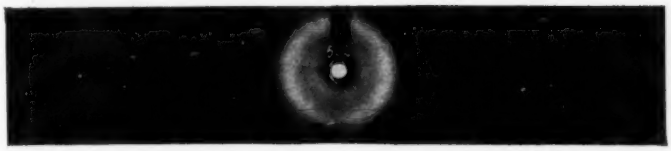


Fig. 10. — Silice amorphe.

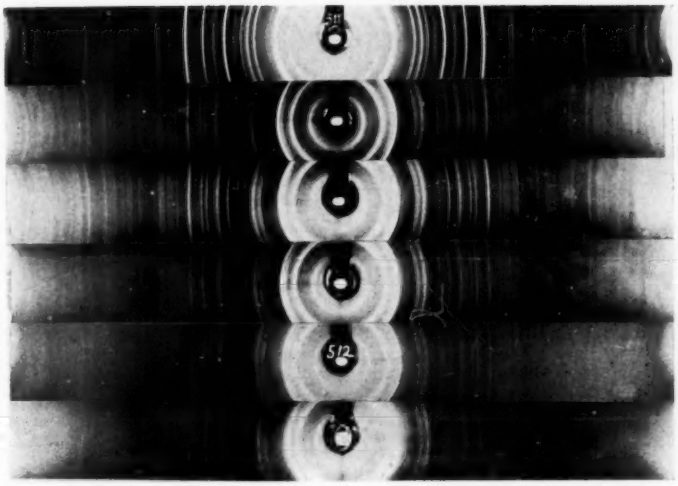


Fig. 11. — Élimination progressive, par sédimentation du quartz d'une argile.

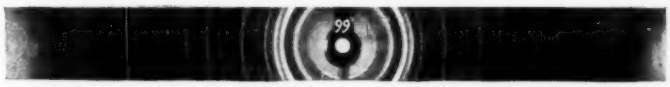


Fig. 12. — Talc calciné.

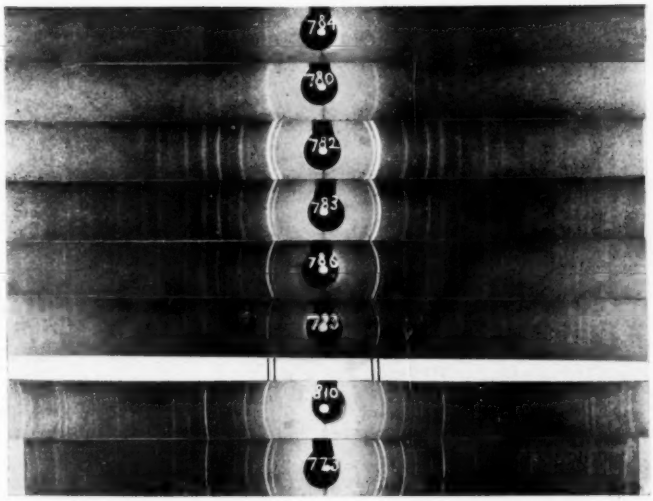


Fig. 13. — Transformation de l'anatase en rutile : influence de la température.

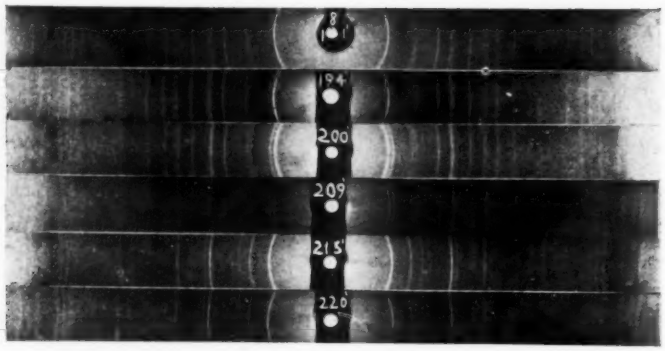
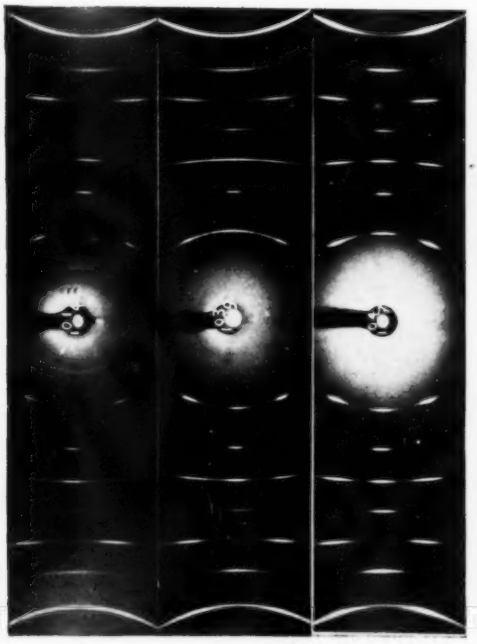


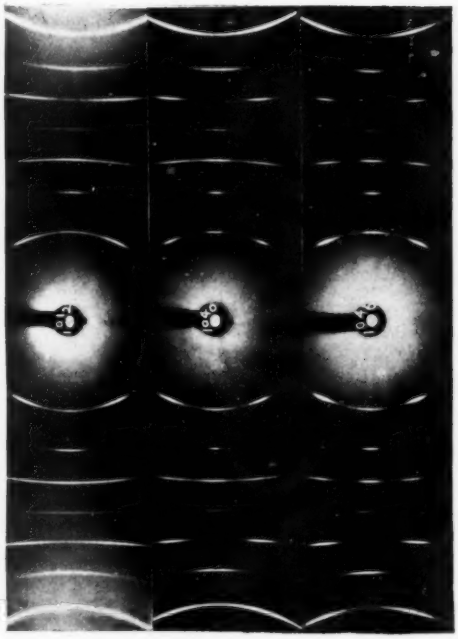
Fig. 14. — Transformation de TiO_2 : action de la durée de cuisson.

Fig. 15. — Transformation de TiO_2 : action de la pression.



a *b* *c*

Fig. 16. — Fil de tungstène flexible.



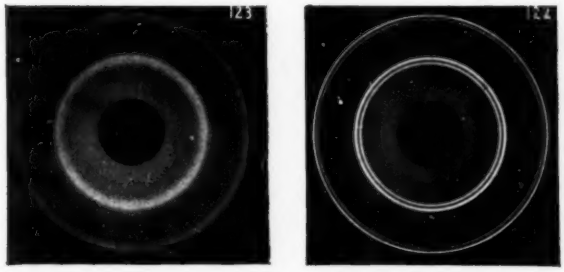
a *b* *c*

Fig. 17. — Fil de tungstène cassant.

a

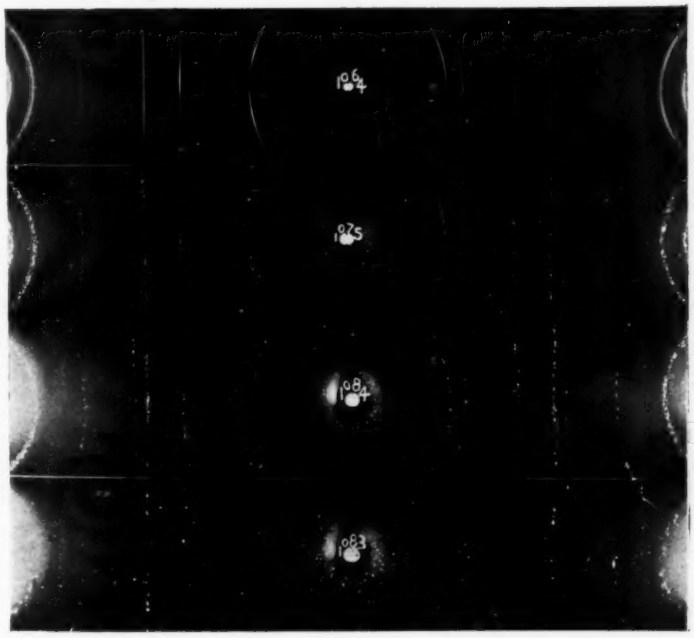
b

Fig. 18. — Texture d'une feuille de nickel pour cathodes.



a *b*

Fig. 19. — Pièce en poudre métallique pressée, avant et après recuisson



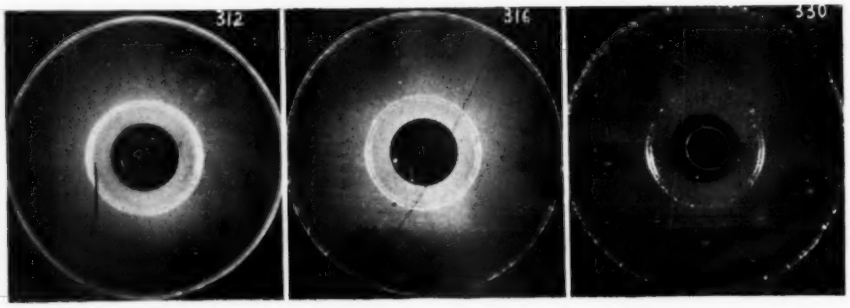
a

b

c

d

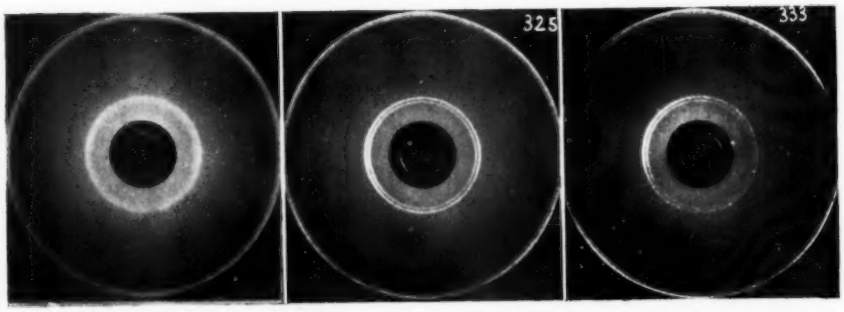
Fig. 20. — Recristallisation de fils de nickel pour cathodes.



a *b* *c*

d

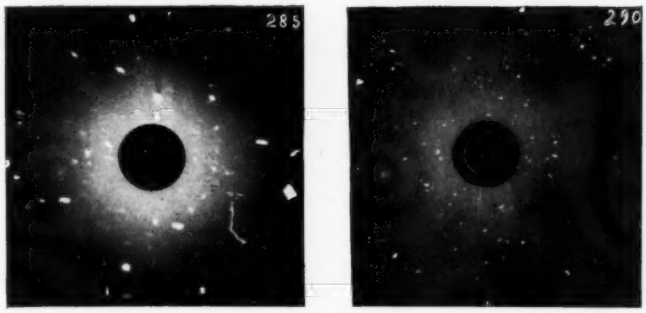
Fig. 21. — Tige de molybdène flexible.



a' *b'* *c'*

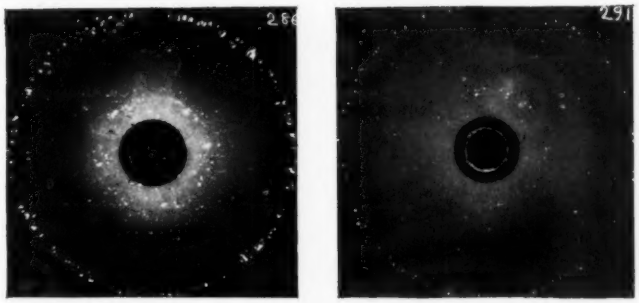
a'

Fig. 22. — Tige de molybdène rigide.



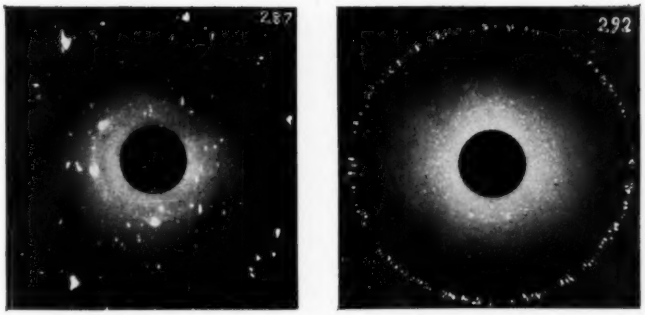
a Fig. 23. *b*

$\Phi = 2^{mm}$. $\Phi = 1^{mm}$.



a Fig. 24. *b*

$\Phi = 2^{mm}$. $\Phi = 1^{mm}$.



a Fig. 25. *b*

$\Phi = 2^{mm}$. $\Phi = 1^{mm}$.

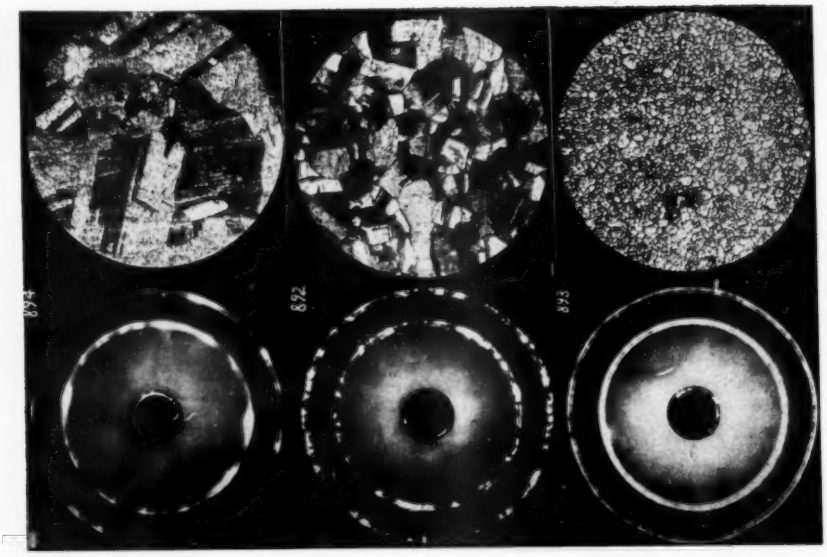


Fig. 27. Cu électrolytique.

Fig. 28. Cu électrolytique.

Fig. 29. Cu électrolytique.

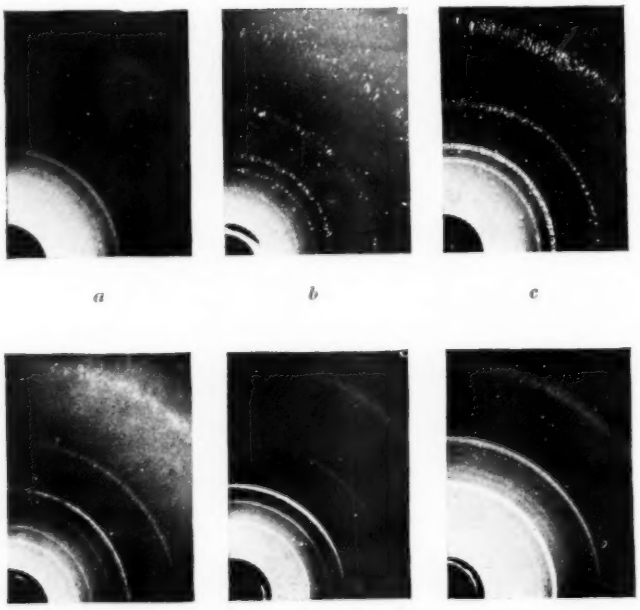


Fig. 30. — Échantillons céramiques.

RÉCENTS DÉVELOPPEMENTS DE LA TECHNIQUE DES LAMPES D'ÉMISSION. UNE SÉRIE DE LAMPES MODERNES

PAR R. SUART,

Chef du Service Développement du Département Lampes de la Société Française Radioélectrique.

SOMMAIRE. — *D'importants progrès ont été réalisés ces dernières années dans la technique des lampes d'émission.*

La première partie de cet exposé traite des conceptions nouvelles et des réalisations qui ont été faites en ce qui concerne les matériaux utilisés, la structure des éléments constitutifs et les procédés de fabrication.

Des lampes de meilleure qualité ont pu être obtenues. Elles se différencient des lampes de construction antérieure par une plus grande puissance sur des ondes plus courtes avec un encombrement réduit.

Une description des tubes modernes récemment mis au point par le Département Lampes de la Société Française Radioélectrique constitue la deuxième Partie.

I. — PROGRÈS TECHNIQUES RÉALISÉS.

A. Aspect général du problème.

Les exigences de la télévision et de la modulation de fréquence ont nécessité la création de nouveaux modèles de lampes capables, dans toute la gamme des puissances, de fournir l'énergie haute fréquence maximum sur la plus basse longueur d'onde possible.

Il fallait notamment obtenir :

— une inductance minimum des sorties d'électrodes,
— une capacité minimum entre les électrodes,
— des effets minima du temps de transit,
— une fréquence maximum d'utilisation,
— une puissance utile maximum,
— une impédance basse (pour les circuits à large bande).

Conditions souvent opposées les unes aux autres.

Ainsi, une faible capacité suppose des électrodes éloignées et de petites surfaces, ce qui réduit la puissance dissipée et augmente le temps de transit.

Il convient donc de rechercher un compromis entre ces différentes qualités.

Jusqu'à ces derniers temps, il était impossible d'obtenir un bon rendement en dépassant une certaine puissance à une fréquence élevée.

Grâce à des idées et des procédés nouveaux, les tubes de construction récente permettent de repousser ces limites.

a. Inductance des sorties d'électrodes.

Celle-ci doit être aussi réduite que possible. On sait, en effet, que l'augmentation de l'inductance des sorties d'électrodes provoque celle de la longueur d'onde limite de la lampe et une charge de grille supplémentaire. Pour les triodes, on constate, de plus, une difficulté à neutraliser et une instabilité aux fréquences élevées.

Pour toutes les lampes, l'inductance des conducteurs de cathode, commune aux circuits grille et plaque, provoque une réaction de couplage absolument prohibitive. Quand les connexions aux électrodes sont réalisées par des conducteurs cylindriques droits, l'inductance est donnée par

$$L = 0{,}002\, l \left(\log_e \frac{4l}{d}\right) \mu\text{H},$$

l et d étant respectivement la longueur et le diamètre du conducteur en centimètres.

La figure 1 donne L en fonction de l pour différentes valeurs de d. On voit donc qu'il faut faire les conducteurs courts et de gros diamètre.

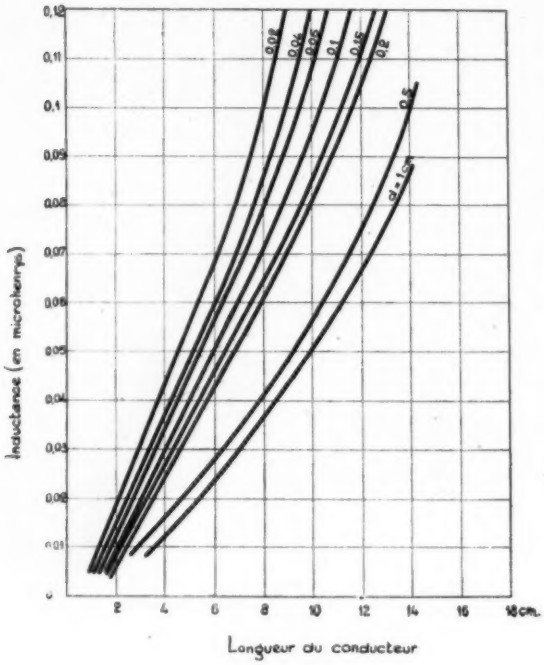


Fig. 1

b. Capacité entre électrodes.

Rappelons que la capacité des électrodes planes est proportionnelle à leur surface, inversement proportionnelle à leur écartement.

Celle des électrodes cylindriques, coaxiales, est inversement proportionnelle au logarithme du rapport de leurs diamètres.

Par ailleurs, la transconductance étant inversement proportionnelle à la distance élevée à la puissance $4/3$, on a avantage à rapprocher les électrodes.

On obtient ainsi une impédance faible qui s'adapte bien aux circuits d'ondes courtes. Cependant, dans le cas d'électrodes cylindriques, la puissance à dissiper est évidemment réduite, et ce point est à prendre en considération.

c. Temps de transit.

On appelle temps de transit électronique le temps que mettent les électrons à franchir, dans la lampe, l'espace cathode-plaque.

Dans le cas de très hautes fréquences, ce temps de parcours représente une fraction assez importante de la période d'oscillation.

Durant la portion du cycle où la grille est positive, et où le potentiel plaque varie autour de sa valeur minimum, il y a passage d'un fort courant d'électrons se dirigeant du filament vers la plaque. En raison du temps que ceux-ci mettent à franchir l'espace cathode-plaque, ils n'atteignent cette dernière qu'à un moment où son potentiel est déjà plus élevé. Les électrons frappant la plaque avec une énergie accrue de ce fait, il en résulte un accroissement des pertes et une baisse du rendement.

La figure 2 illustre ce phénomène. On suppose, pour simplifier le raisonnement, que l'impul-

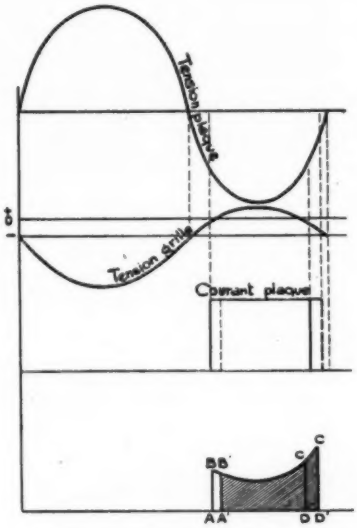


Fig. 2.

sion du courant plaque est de forme carrée. Un décalage du courant par rapport à la tension plaque permet d'augmenter la dissipation anodique (surface hachurée $A^1B^1C^1D^1$, comparativement à la surface ABCD obtenue quand il n'y a aucun décalage).

Les électrons quittant le filament sont directement soumis à l'accélération provoquée par le potentiel positif de grille. Ils acquièrent, de ce fait, une vitesse qui dépend, en première approximation, du potentiel grille.

Le temps de parcours de l'intervalle filament-grille (T_{fg}) est donc égal au quotient de la distance filament-grille (d_{fg}) par la vitesse v.

Rappelons que la vitesse d'un électron

$$v = \frac{2eV}{m} \text{ cm/sec},$$

dans laquelle

e, charge d'un électron

$$1,4.10^{-19} \text{ coulomb} = 1,4.10^{-20} \text{ U. C. G. S.}$$

m, masse d'un électron

$$0,8.10^{-27} \text{ gramme.}$$

V, tension accélératrice en unités C. G. S. (1 volt = 10^8 unités C. G. S.),

$$V = V_{g\,max} + \frac{V_{p\,min}}{\mu}.$$

avec :

$V_{g\,max}$, partie positive de l'amplitude d'excitation de grille;

$V_{p\,min}$, tension de déchet en oscillation;

μ, coefficient d'amplification de la lampe.

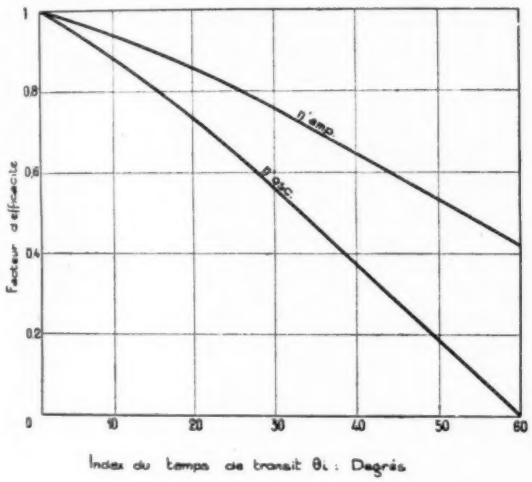


Fig. 3.

La figure 3 (1) donne la perte de rendement relative en fonction de l'angle de parcours α avec

$$\alpha = \frac{T_{fg}}{T_p} \times 360^0,$$

T_p étant la durée d'une période d'oscillation.

R. Gavin (2) donne encore la formule suivante, pour déterminer la longueur d'onde limite par le temps de parcours électronique :

$$\lambda_{min} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{V_p}} \left[3 d_{gf} + \frac{2 d_{gp}}{\sqrt{\mu + 1}} \right],$$

λ_{min} d_{fg} d_{gp} sont exprimées en centimètres;
V_p est exprimée en volts.

(1) Andrew V. Haeff, *R. C. A. Review.*, juillet 1939.
(2) R. Gavin, *Wireless Engineer*, juin 1939.

d. Fréquence maximum d'utilisation.

La fréquence maximum est fonction des facteurs précédents. Elle est fixée théoriquement par les dimensions géométriques de la lampe.

En pratique, on doit tenir compte également de la tenue des isolants placés dans des champs intenses à haute fréquence. On se souviendra, en particulier, que les pertes sont proportionnelles au carré de la tension, d'où l'intérêt de réduire la tension anodique quand cela est possible. On devra étudier également la résistance que les conducteurs d'amenée de courant aux électrodes offrent aux courants H. F.

e. Puissance utile maximum.

Cette puissance est fonction de celle admise pour le chauffage de la cathode, de la tension anodique définie suivant les considérations précédentes, et enfin du pouvoir de dissipation des électrodes grille et anode (lui-même proportionnel à la surface des électrodes, toutes choses égales par ailleurs).

Pour les petites lampes, spécialement destinées à l'équipement des postes mobiles, la puissance de chauffage ne peut être très élevée, l'énergie globale étant souvent prise sur les batteries de bord.

Par contre, les lampes de puissance utilisées à poste fixe peuvent être pourvues, sans inconvénient, de cathodes importantes. La tension anodique est alors plus faible et les frais d'installation se trouvent réduits pour une large part. Ces frais sont, en effet, à peu près proportionnels au carré de la haute tension à fournir.

On ne peut cependant augmenter sans cesse la puissance de la cathode, ce qui diminuerait au fur et à mesure le rendement global en énergie. On est limité d'ailleurs en pratique par les dimensions respectives de la cathode et du tube.

Enfin, une tension anodique réduite supprime tout risque de décharges internes (Rocky-Points).

Le rendement de la lampe étant fonction de la petitesse des électrodes, il y a intérêt à calibrer celles-ci au plus juste.

L'idéal serait d'obtenir que les trois paramètres qui déterminent la puissance maximum : puissance de chauffage, tension anodique et dissipation soient en accord parfait.

Rappelons que deux quelconques d'entre eux définissent toujours le troisième.

f. Impédance réduite de la lampe.

Les circuits utilisés en ondes courtes sont toujours amortis et de faible impédance (particulièrement en télévision par suite de la large bande passante).

Leur adaptation à la lampe sera d'autant meilleure et aisée que celle-ci présentera, elle-même, une faible impédance, c'est-à-dire fonctionnera avec une tension anodique réduite et un fort courant anodique (puissance de chauffage élevée pour la cathode). Un compromis doit intervenir pour éviter des puissances de chauffage prohibitives.

B. Progrès techniques réalisés dans la construction des lampes d'émission.

Les exigences d'ordre électrique sont fondamentales. Il en est d'autres, cependant, qui s'imposent au constructeur.

Pour obtenir des lampes identiques entre elles et de bonne qualité mécanique (éléments robustes, centrages rigoureux), il a fallu réviser tous les procédés de fabrication, imaginer de nouvelles formes, découvrir de nouveaux matériaux et de nouveaux traitements.

Une fabrication parfois artisanale est ainsi parvenue au stade industriel.

Nous le montrerons en étudiant successivement les matériaux, la réalisation des pièces détachées, les procédés d'assemblages.

a. Matériaux.

Une lampe d'émission comporte des électrodes métalliques (cathode-grilles-anode) soutenues, entretoisées et entourées par des parties isolantes.

Afin d'obtenir un plus grand pouvoir de rayonnement de la chaleur dégradée, le métal d'anode doit être d'un aspect granuleux et d'une couleur se rapprochant du noir. Il est fréquemment recouvert à cet effet.

Un procédé souvent employé consiste à projeter, sur les anodes en molybdène, une solution contenant de la poudre de *zirconium* en suspension. Le dépôt ainsi formé est fixé par chauffage sous vide à 1200°.

On peut également déposer du zirconium sur les grilles.

Mentionnons, d'autre part, deux propriétés particulièrement intéressantes de ce métal :

Il remplit les fonctions de getter, avec un pouvoir d'absorption suffisant, surtout entre 500 et 700°, pour assurer une parfaite conservation du vide.

Enfin, le taux d'émission secondaire du zirconium est suffisamment faible pour que son emploi, dans la réalisation des grilles, réduise très sensiblement les effets toujours néfastes de l'émission secondaire de ces électrodes (caractéristiques déformées, instabilité dans certains régimes dynamiques).

Dans la catégorie des métaux se scellant aux verres, deux alliages se sont révélés extrêmement utiles, ce sont : l'alliage fer-nickel-cobalt et l'alliage ferro-chrome.

L'alliage fer-nickel-cobalt (Fe 54 %, Ni 29 %, Co 17 %, traces de Mn), souvent appelé Kovar ou Fernico est doué de propriétés qui s'adaptent à l'industrie du vide, et dont la principale est d'avoir un coefficient de dilatation voisin de celui des verres durs utilisés dans les lampes d'émission (47.10^{-7}).

En utilisant cet alliage comme intermédiaire, les électrodes des lampes à anodes refroidies par circulation d'eau peuvent être facilement soudées aux enveloppes de verre.

Le Kovar peut être obtenu en plaques, barres, lingots. Il s'usine comme l'acier. Il se laisse repousser, emboutir, plier. Il peut être brasé aux principaux métaux. Nous reviendrons plus loin sur son utilisation, à propos des joints étanches au vide.

L'alliage ferro-chrome (Fe 70 %, Cr 30 %) possède un coefficient de dilatation extrêmement proche de celui du cristal (92.10^{-7}) ce qui le fait utiliser pour les passages de pieds, spécialement quand les sorties d'électrodes doivent être rigides (lampes sans culot).

Nous reviendrons également sur l'utilisation de l'alliage ferro-chrome en étudiant la réalisation des éléments dont se composent les lampes.

En ce qui concerne les getters, bien que le *baryum* reste le métal le plus employé, on utilise souvent des alliages tels que le *baryum-magnésium*, le *baryum-tantale*, le *baryum-thorium*. Nous avons vu que le *zirconium* constituait un bon getter. Rappelons enfin que le *tantale*, après dégazage, donne d'excellents résultats.

Parmi les matériaux isolants utilisés dans la fabrication des tubes, le *verre* est celui dont l'emploi est le plus fréquent. Il joue le rôle de support et d'enveloppe pour les électrodes. On lui demande des qualités multiples, qu'il est toujours difficile d'obtenir.

Les principales d'entre elles sont les suivantes :

— robustesse aux efforts mécaniques;
— bonne tenue aux chocs thermiques;
— résistivité élevée;
— pertes diélectriques les plus faibles;
— facilité de travail en verrerie et en usine (montage, pressage, façonnage aux chalumeaux);
— dilatation appropriée à celle des métaux auxquels il doit se souder;
— stabilité et inaltérabilité aux agents atmosphériques.

Alors qu'en réception le cristal répond bien à toutes ces prescriptions, les verres durs, utilisés en émission, présentaient des imperfections en matière de pertes diélectriques. L'emploi des verres américains types Nonex marquait un progrès ($\operatorname{tg}\delta = 15.10^{-4}$ contre 35.10^{-4}). A l'heure actuelle, des verres améliorés permettent de satisfaire aux nouvelles exigences de la technique des hautes fréquences.

b. Réalisation des pièces détachées.

1° *Support d'électrodes* (appelés conventionnellement pieds de lampes) : Les anciens pieds à pincements (*fig.* 4 A) sont fréquemment remplacés à présent par des pieds en plateaux ou en cuvettes d'encombrement réduit. Leurs protubérances sont traversées par des fils de copper-clad (si les lampes comportent un culot) ou par des tiges rigides de ferro-chrome, kovar, molybdène ou tungstène (lampes sans culot) comme le représente la figure 4 B. La

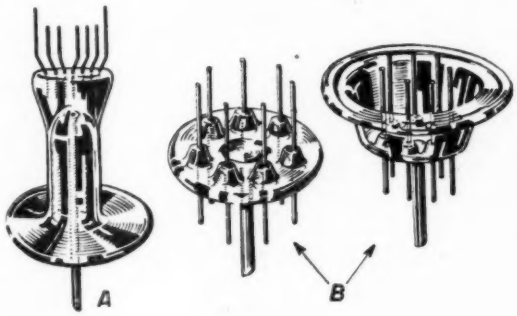


Fig. 4.

fabrication de ces nouveaux pieds s'effectue sur machine, de façon très simple, par pressage entre poinçon et matrice. On dispose d'abord, dans la matrice, les passages, parfois gaînés de verre au préalable, des bagues ou disques de verre de dimensions appropriées. Le tout est chauffé au chalumeau oxy-gaz jusqu'à ramollissement total du verre. Puis, on presse avec le poinçon. On obtient ainsi des pièces de dimensions rigoureuses. Une variante consiste à garnir la matrice non pas avec des bagues de verre, mais avec de la poudre de verre.

D'une manière analogue, les pieds de sorties filament des lampes à circulation d'eau, autrefois réalisés sous la forme de manchons concentriques à tétons (*fig.* 5 A), sont à présent du modèle de la figure 5 B. La dimension de ces pièces permet d'utiliser des traversées en cuivre, qui laissent passer les courants de chauffage (pouvant atteindre plusieurs centaines d'ampères) sans résistance appréciable. Le scellement verre-métal est réalisé par l'intermédiaire d'un anneau de kovar. Le volume du pied s'est trouvé réduit par ces nouvelles dispositions [1].

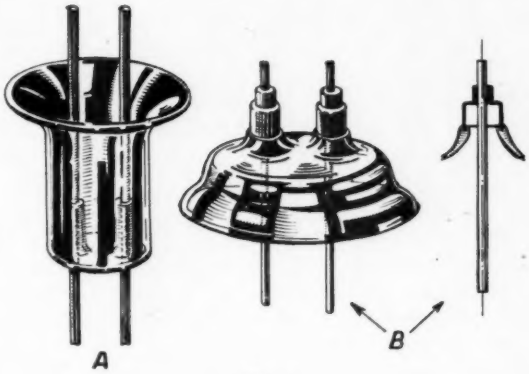


Fig. 5.

2° *Ampoules et ballons.* — Les machines à fermer classiques, utilisées pour les pieds à pincements s'accomodaient au mieux d'ampoules coniques à dôme (*fig.* 6 A). La tendance actuelle, pour les pieds en plateaux ou coupelles, est de prendre des ampoules cylindriques avec un fond de diamètre réduit pour le logement du getter et arrêt du mica supérieur des électrodes. L'extrémité ouverte de l'ampoule fait éventuellement un léger rebord (pour le raccordement aux pieds en cuvette) (*fig.* 6 B).

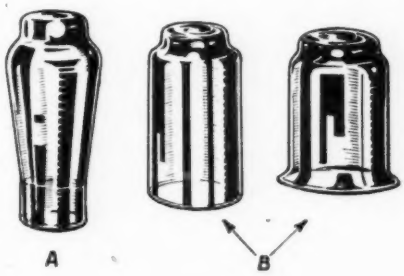


Fig. 6.

Grâce aux verres nouveaux, de meilleures qualités isolantes et diélectriques, on a pu réduire considérablement les dimensions des ballons destinés à tenir l'isolement haute tension entre anode, grille et filament. La figure 7 montre, en A, l'ancien ballon et en B les formes nouvelles, renflées de façon à réduire la hauteur utile tout en conservant une ligne

[1] Brevet S. F. R. n° 472279 du 6 octobre 1942.

de fuite suffisante. Le ballon de droite, qui ressemble à un véritable isolateur en accordéon, est particulièrement adapté aux hautes tensions (jusqu'à 20 kV).

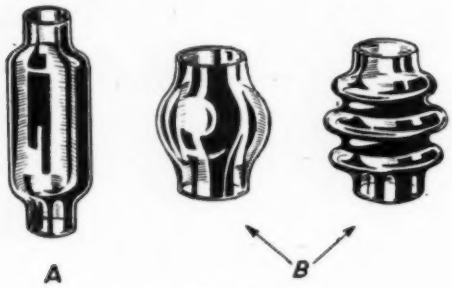


Fig 7.

3° *Cathodes.* — Signalons seulement l'emploi, de plus en plus général, dans les lampes de grandes puissances, des filaments à brins multiples pour chauffage direct en courant alternatif triphasé ou hexaphasé. L'installation des stations d'émission s'en trouve très simplifiée, les grosses génératrices pouvant être supprimées et remplacées par de simples transformateurs de chauffage.

4° *Grilles.* — Pour les petites lampes, on a réalisé des grilles de commande en fil fin (de l'ordre de 50 μ) et à pas serré. Elles sont placées à une distance inférieure à 0,2 mm de la cathode. Leur emploi a permis de construire quelques modèles de lampes oscillatrices ou amplificatrices H. F. ou B. F. à grande pente et de très bon rendement. De telles conditions mécaniques exigent des éléments parfaits, un montage très précis et un contrôle sévère en cours de fabrication.

La même tendance destinée à obtenir un meilleur contrôle du flux électronique se retrouve dans plusieurs modèles de lampes à circulation d'eau.

Les grilles peuvent être utilement recouvertes d'un dépôt de zirconium pour réduire l'émission secondaire et l'émission thermique primaire ainsi que pour contribuer au maintien d'un bon vide.

Dans les lampes de grande puissance, la grille était autrefois reliée à un collier de fixation au pied par une série de tiges en molybdène (*fig.* 8 A). La sortie était constituée par une connexion souple reliant le collier à la sortie grille scellée au ballon.

Actuellement, les grilles des lampes modernes comportent (*fig.* 8 B) un cône de métal, généralement en nickel, raccordant le corps de grille avec une sortie annulaire en kovar scellée au verre du ballon [1]. Cette disposition assure une grande rigidité mécanique, une liaison courte et massive d'inductance et de résistance électrique minima, et une répartition uniforme du champ entre grille et anode.

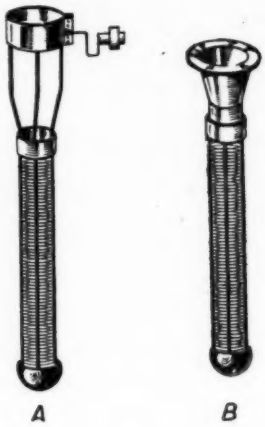


Fig. 8.

5° *Anodes.* — Les anodes des petites lampes d'émission sont constituées le plus souvent par deux pièces symétriques, de métal découpé et embouti, maintenues par des montants rigides issus du pied. Pour les montages modernes, sans pieds à pincements, où l'on ne dispose pas de ces montants, on utilise parfois des anodes découpées et pliées en une pièce à partir d'une bande de métal. Ces anodes présentent la forme de la figure 9. Un premier décrochement *a* prend appui sur les micas entretoisant les électrodes, cependant qu'un deuxième décrochement en forme de languette *b* est destiné à fixer l'anode par engagement dans une ouverture appropriée des micas, l'extrémité dépassante étant ensuite tournée sur elle-même.

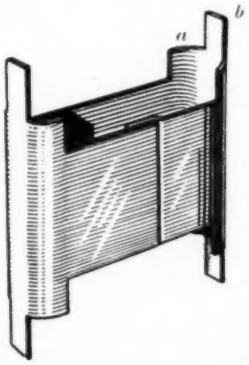


Fig. 9.

[1] Brevet S. F. R. n° 469806 du 8 juillet 1942.

La dissipation unitaire des anodes en cuivre des lampes à circulation d'eau était de 40 à 50 W : cm². Elle a pu être portée à 60 ou 80 W : cm² par une disposition de rainures longitudinales ou hélicoïdales qui augmentent la surface de contact du cuivre et de l'eau de réfrigération, pour un même encombrement.

Pour assurer le scellement du ballon à l'anode, il est nécessaire de rapporter un anneau intermédiaire de kovar. Cet anneau est brasé au cuivre. Cette opération difficile (les coefficients de dilatation du cuivre et du kovar étant dans le rapport de 1 à 3) a pu être codifiée définitivement après une étude particulière [1].

C. **Procédés d'assemblage.**

Cette opération est entre toutes la plus délicate. Il faut satisfaire aux conditions habituelles des assemblages mécaniques minutieux utilisés dans les lampes (robustesse, précision de positionnement, tenue aux températures élevées, etc.). De plus, toutes les jonctions des parois extérieures (raccordements des pieds aux ampoules ou ballons, des anodes aux ballons et même raccordements d'électrodes extérieures réalisées en deux parties pour les commodités de montage) *doivent être parfaitement étanches au vide.*

Ces derniers assemblages sont de trois sortes :

1° verre-verre;
2° verre-métal;
3° métal-métal.

La jonction de deux pièces en verre était, jusqu'à présent, toujours faite à l'aide de chalumeaux. Les bords des pièces étaient chauffés jusqu'à ramollissement, puis placés en contact et enfin soudés par fusion du verre. Cette opération exige, pour réussir, un réglage approprié des flammes. De plus, les précautions nécessaires d'échauffement et de refroidissement progressifs nécessitent une main-d'œuvre très spécialisée.

On a cherché, pour les nouvelles formes de verrerie, à éliminer complètement l'usage des flammes. Ainsi, on peut souder les bords en contact de deux pièces de verre en les chauffant par le rayonnement d'un anneau de métal porté au rouge par le passage d'un courant issu du secteur ou induit par haute fréquence.

Un autre moyen consiste à déposer, sur les bords des pièces à assembler, une mince couche métallique (cuivre ou argent par exemple) et à la chauffer par induction de courant haute fréquence. Le métal communique sa chaleur au verre, l'amène au voisinage du point de fusion et assure ainsi la jonction.

On peut également utiliser les propriétés diélectriques du verre pour provoquer son échauffement en présence d'un champ à très haute fréquence. Ce procédé, séduisant à première vue, a l'inconvénient de nécessiter un chauffage préalable des portions de verre à assembler. Il faut, en effet, au début de l'opération, accroître artificiellement le coefficient de pertes diélectriques, qui, justement dans les verres récemment mis au point, est particulièrement faible.

Enfin, un dernier procédé, utilisé avec le cristal, consiste à assembler les bords des pièces de verre par l'interposition d'un émail dont le point de fusion est relativement bas. Cet émail est déposé tout d'abord au pinceau, sous forme de pâte. Il est ensuite soumis à l'action du rayonnement d'un anneau chauffant. Ce système, qui n'exige qu'une température réduite, est extrêmement simple et évite les échauffements indésirables des autres parties de la lampe.

Pour les assemblages verre-métal, on peut utiliser ce dernier procédé en émaillant au préalable la pièce métallique à souder. Mais, il ne convient pas aux jonctions verres durs-kovar, qui sont les plus fréquentes et pour lesquelles on utilise le procédé classique : le bord de la pièce de métal, convenablement dégazé, est amené au contact du verre. Il est porté au rouge par l'effet d'un solénoïde de quelques spires parcouru par un courant de haute fréquence.

Il ramollit le verre à son contact et s'y enfonce d'une certaine hauteur. L'opération est très simple. Elle peut être menée rapidement par un personnel même non spécialisé.

Pour les pièces de grandes dimensions, il peut être nécessaire de procéder ensuite à un recuit ou à un refroidissement progressif du verre. Ces assemblages présentent une très grande robustesse mécanique et thermique. Ils se prêtent parfaitement aux variantes de forme, de disposition ou de dimensions que la technique moderne des tubes à vide conduit à imaginer. C'est ainsi, par exemple, que l'assemblage d'un tube de verre avec un disque ou un plateau de métal est réalisable.

Les assemblages métal-métal étanches au vide peuvent être effectués par soudure autogène, par soudure électrique par points (qui doivent être suffisamment rapprochés ou même se superposer pour assurer la continuité du joint) ou par brasure (le choix de la brasure est déterminé par la nature des

[1] Brevet S. F. R. n° 466524 du 23 mars 1942.

métaux à joindre. « La brasure doit mouiller correctement le métal ».)

Ainsi, on peut, dans certains cas, utiliser une soudure à l'étain (on veillera particulièrement alors au décapage initial des pièces).

Ces trois principaux modes d'assemblage peuvent se combiner. On peut réaliser, par exemple, une jonction étanche verre-verre par l'intermédiaire d'un anneau de métal, ou une jonction étanche métal-métal par l'intermédiaire d'un anneau de verre.

II. — LES NOUVELLES LAMPES D'ÉMISSION DE LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE RADIOÉLECTRIQUE.

La Société française Radioélectrique a mis au point et réalisé un certain nombre de lampes nouvelles selon les principes précédemment exposés.

13 types modernes de lampes à refroidissement naturel ou forcé assurent ainsi toute la gamme des puissances, depuis 2 W jusqu'à 450 kW, c'est-à-dire jusqu'à la plus grosse lampe d'émission construite à ce jour dans le monde.

A. Lampe P 2.

Cette lampe (*fig.* 10) est une pentode destinée à l'équipement des postes militaires mobiles. Elle est

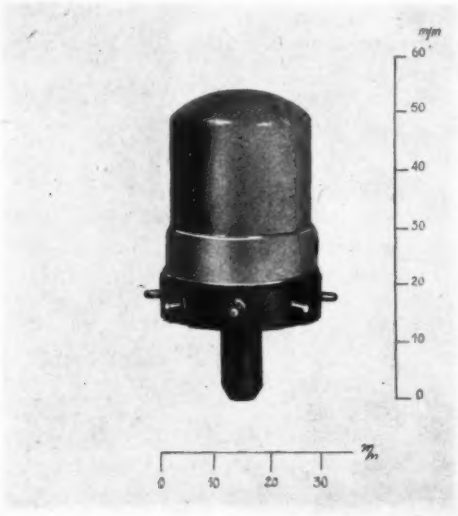


Fig. 10.

d'un volume très réduit et d'une construction très robuste. Elle peut être utilisée aussi bien à l'émission qu'à la réception en H. F., B. F. ou M. F. La pente, et la dissipation anodique sont suffisamment élevées pour répondre à toutes les exigences.

Un capot d'aluminium coiffant l'ampoule assure le blindage électrostatique et la protection du verre. Un culot ramassé à contacts latéraux contribue à sa robustesse, sans augmenter la longueur des conducteurs de sortie.

Notons l'emploi du pied-plateau et le scellement verre-verre de l'ampoule et du pied, par un émail.

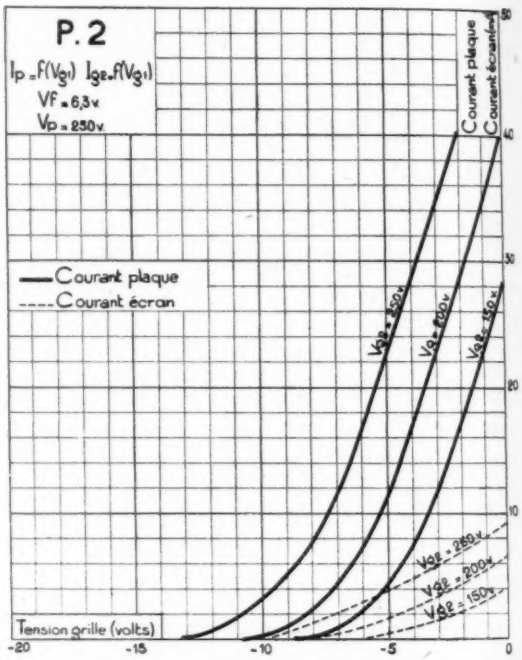


Fig. 11.

Les caractéristiques électriques de cette lampe sont les suivantes :

Cathode		(chauff. ind.)
Tension filament		6,3 V
Courant filament		0,5 A
Tension anodique max.		300 V
Dissipation anodique max.		2,5 W
Tension écran max.		250V
Dissipation écran max.		0,8 W
Coefficient d'amplification K'		28
Pente (pour $I_a = 12,5$ mA)		4,8 mA/V
Courant cathodique max.		20 mA
Puissance sortie en régime télégraphique.		2 W (OL)
Capacités interélectrodes	grille-plaque.	0,014 pF
	entrée	8 pF
	sortie	5,5 pF
Longueur d'onde limite		1 m env.

La figure 11 donne le réseau des caractéristiques courant-plaque et courant-écran en fonction de la tension de la grille de contrôle.

B. **Lampe P 6.**

Cette lampe est une pentode d'usage général. Ses dimensions réduites et ses sorties directes sans culot permettent de conserver un bon rendement en ondes courtes.

La sortie d'anode est dans le pied-plateau pour la commodité d'emploi. Un ergot de centrage métallique protège le queusot de pompage et assure le positionnement automatique dans le support.

La lampe peut être munie d'un capot supérieur destiné au blocage de la lampe dans un logement de la platine des émetteurs. Un anneau escamotable permet l'introduction ou le retrait de la lampe de son logement [1].

Une telle disposition diminue l'encombrement et facilite les manipulations.

La figure 12 représente la lampe sans son capot supérieur.

Fig. 12.

Les caractéristiques électriques en sont données ci-dessous :

Cathode à oxydes	(chauff. indirect)
Tension de chauffage	6,3 V
Courant de chauffage	0,5 A
Tension anodique max.	500 V
Dissipation anodique max.	10 W
Tension d'écran max.	250 V
Dissipation d'écran max.	2,5 W
Coefficient d'amplification K'	6
Perte pour $I_a = 40$ mA	2,4 mA-V
Courant cathodique max.	45 mA
Capacités interélectrodes : grille-plaque	0,04 pF env.
Capacités interélectrodes : entrée	6 pF »
Capacités interélectrodes : sortie	10 pF »

Les figures 13 et 14 donnent respectivement les courbes courant-plaque en fonction de la tension

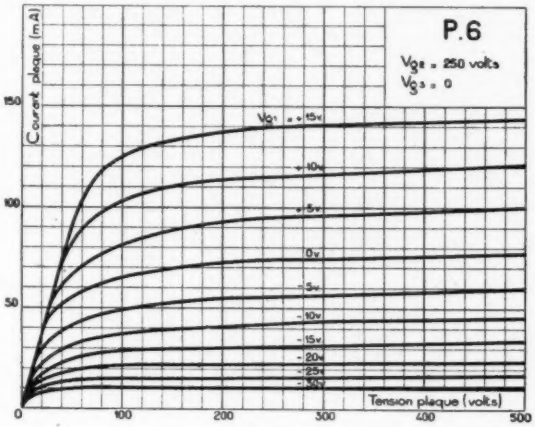


Fig. 13.

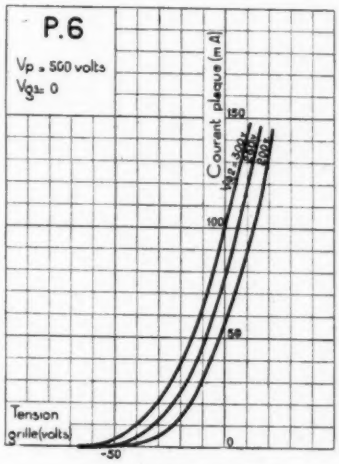


Fig. 14.

grille et courant-plaque en fonction de la tension plaque (réseau de Kellog).

[1] Brevet S. F. R. n° 481462 du 17 juillet 1943.

C. **Lampe P 2/6** (*fig.* 15).

Elle réunit en une même lampe les éléments de deux P 6 dont on retrouve les différents avantages.

De plus, les sorties filament, écran et G 3 sont communes aux deux éléments. Les sorties anodes sont disposées à la partie supérieure de l'ampoule.

Le pied utilisé est un pied-coupelle.

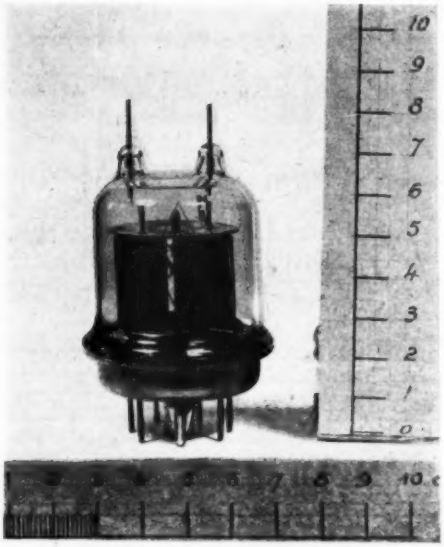


Fig. 15.

Étant une double pentode, la P 2/6 est particulièrement intéressante pour les montages symétriques en OTC.

Les caractéristiques électriques (pour chaque élément) sont celles de la lampe P 6.

Les filaments des deux éléments sont connectés en parallèle.

D. **Lampe P 40** (*fig.* 16).

C'est une lampe à faisceaux dirigés, construite sur le principe de la lampe P 6. Ses qualités particulières sont dues au rapprochement des électrodes, la lampe étant construite de telle façon que les écartements cathodes et grilles sont réduits aux plus faibles valeurs.

On remarquera, pour ce tube, la pente et la puissance utile élevée sous une tension anodique relativement faible.

Les caractéristiques électriques sont données ci-dessous.

Cathode à oxydes		(chauff. indirect)
Tension de chauffage		6,3 V
Courant de chauffage		1,45 A
Tension anodique max.		500 V
Dissipation anodique max.		20 W
Tension écran max		275 V
Dissipation écran max		7 W
Pente pour I_a = 50 mA		7 mA-V
Coefficient d'amplification K'		9
Courant anodique max		110 mA
Capacités interélectrodes	grille-plaque	0,1 pF env.
	entrée	18 pF »
	sortie	8 pF »
Tension max. entre élément chauffant et cathode		110 V
Puissance sortie en régime télégraphique	OL = 150 m.	40 W
	OC = 15 m.	35 »
	OTC = 2,5 m.	25 »
Puissance de sortie en porteuse dans le cas où la modulation est appliquée sur la plaque et l'écran		30 W (OL)
Puissance de sortie en porteuse dans dans le cas où la modulation est appliquée sur la grille		11 W (OL)
Longueur d'onde limite		1,25 m env.

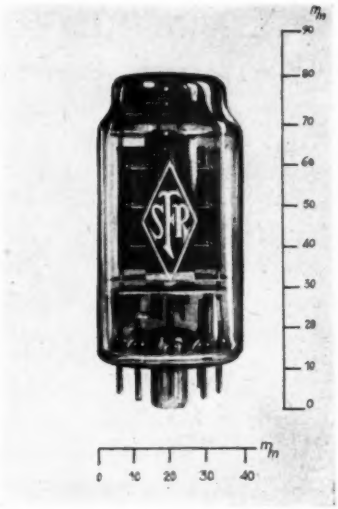


Fig. 16.

La figure 17 donne les courbes du courant plaque en fonction de la tension grille.

La figure 18 donne les courbes du courant plaque et du courant d'écran en fonction de la tension plaque (réseau de Kellog).

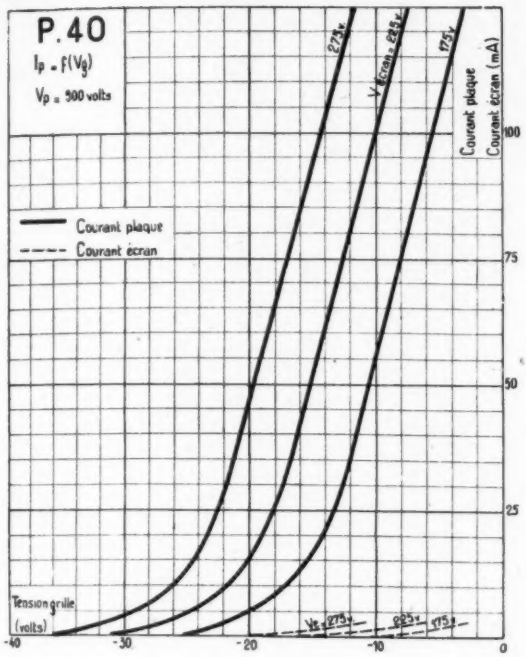


Fig. 17.

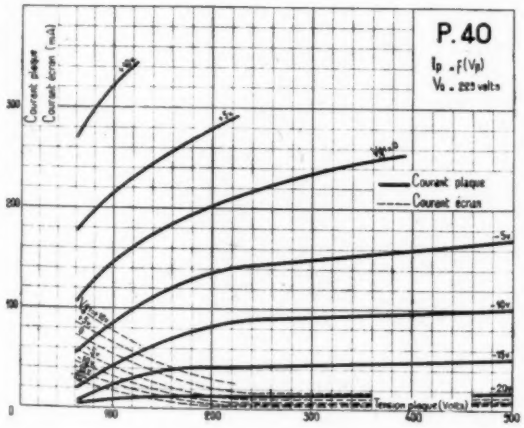


Fig. 18.

E. **Lampe P 2/40** (*fig.* 19).

La P 2/40 est constituée par la réunion dans une même ampoule des éléments de deux P 40.

La disposition générale est identique à celle de la P 2/6.

Le rendement de cette lampe est excellent, même aux plus faibles longueurs d'ondes.

C'est ainsi qu'à 200 Mc, la tension anodique et la puissance appliquée restent les mêmes qu'aux fréquences plus basses.

Les grilles écrans sont reliées entre elles dans l'ampoule, ainsi que les cathodes.

Les filaments des deux éléments peuvent être alimentés en série ou en parallèle.

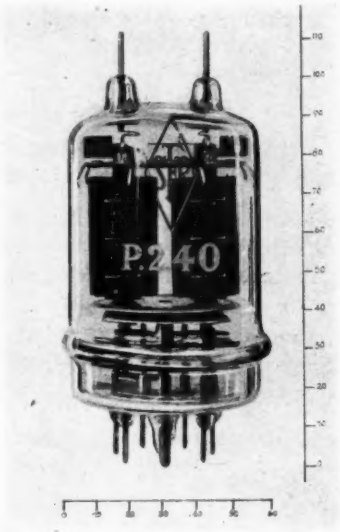


Fig. 19.

Un refroidissement par circulation forcée d'air est à employer.

Les caractéristiques électriques, pour chaque élément, sont celles de la lampe P 40.

F. **Lampe P 200.**

La P 200 est une pentode à filament thorié. Elle est destinée à l'équipement des étages finaux d'émetteurs de faible puissance ou des étages intermédiaires d'émetteurs plus puissants sur les ondes courtes et très courtes.

Sous un faible volume, elle est capable de fournir une puissance importante.

La figure 20 donne une idée du principe de construction adopté pour ce modèle.

L'anode, en molybdène recouvert de zirconium, rayonne une puissance élevée, tout en conservant, sa vie durant, un excellent vide à la lampe.

Les caractéristiques électriques sont indiquées ci-dessous :

Filament	(tungstène thorié)
Tension filament	10 V
Courant filament	4 A
Tension anodique max.	2 000 V
Dissipation anodique max.	120 W
Tension écran max.	500 V
Dissipation écran max.	25 W
Courant cathodique max ($I_p + I_{g1} + I_{g2}$)	250 mA
Coefficient d'amplification de la grille écran	$K' = 9$
Pente pour $I_a = 80$ mA	$S = 3{,}75$ mAV
Capacités interélectrodes : entrée	16,5 pF
Capacités interélectrodes : sortie	23 pF
Capacités interélectrodes : grille-anode	0,1 pF
Longueur d'ondes limite infér. à	2 m

Aux longueurs d'ondes supérieures à 15 m, à 2 000 V, la puissance oscillante atteint 250 W pour une puissance de commande de 2 W environ.

Fig. 20.

En ondes courtes sur $\lambda = 6$ m, la puissance oscillante atteint encore 140 W, la tension plaque étant réduite à 1 500 V.

La figure 21 donne la caractéristique du courant plaque et du courant écran en fonction de la tension grille.

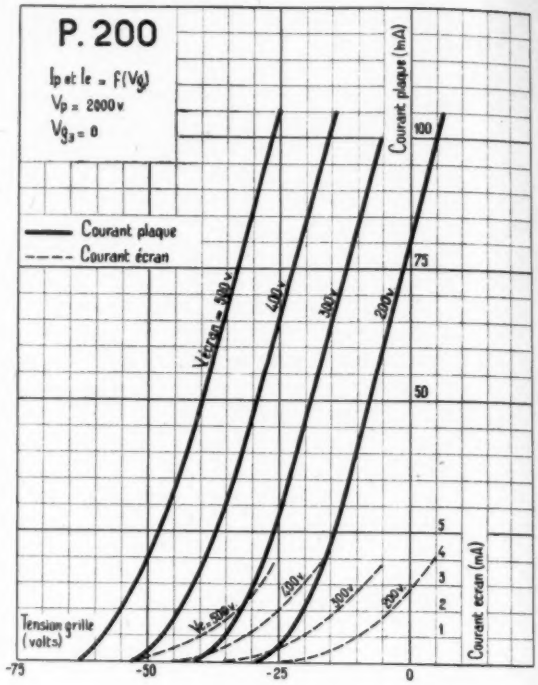


Fig. 21.

La figure 22 donne les courbes du courant plaque et du courant écran en fonction de la tension plaque (réseau de Kellog).

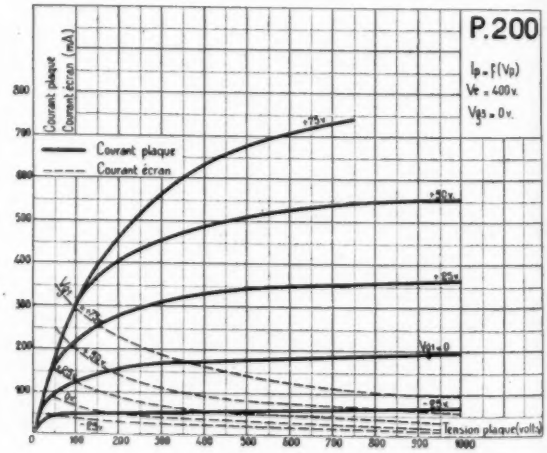


Fig. 22.

G. **Lampe P 2/200** (*fig.* 23).

Cette lampe est constituée par la réunion, dans une même ampoule de deux éléments P 200.

Leurs filaments sont connectés en parallèle et leurs sorties écran et grille 3 communes.

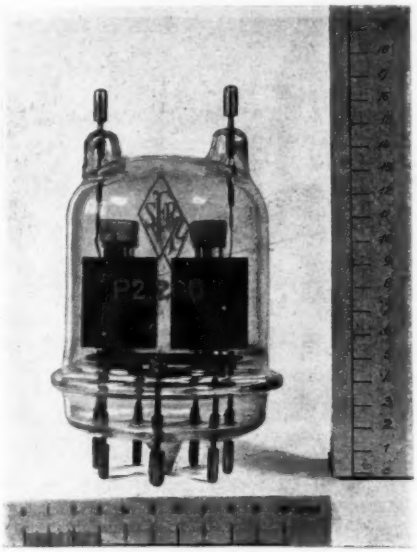


Fig. 23.

Les caractéristiques électriques de cette lampe, par élément, sont celles de la lampe P 200.

H. **Lampe P 600** (*fig.* 24).

De même principe que la P 200, cette lampe est capable de délivrer une puissance environ trois fois supérieure.

Les caractéristiques électriques sont indiquées ci-après :

Filament	(tungstène thorié)
Tension filament	10 V
Courant filament	10 A
Tension anodique max.	2 500 V
Dissipation anodique max.	350 W
Tension écran max.	700 V
Dissipation écran max.	45 W
Courant cathodique max. ($I_p + I_{g1} + I_{g2}$)	550 mA
Coefficient d'amplification	$K' = 6,5$
Pente pour $I_a = 225$ mA	$S = 6,5$ mAV
Capacités interélectrodes : entrée	23 pF
Capacités interélectrodes : sortie	28 pF
Capacités interélectrodes : grille-anode	0,1 pF
Longueur d'ondes limite voisine de.	4 m

Aux longueurs d'ondes supérieures à 15 m, cette pentode donne une puissance oscillante de 700 W avec une tension anodique de 2 500 V et environ 5 W de puissance de commande.

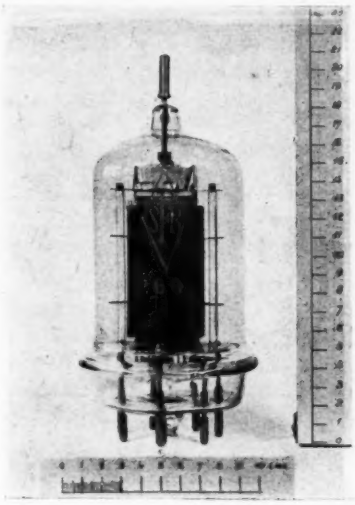


Fig. 24.

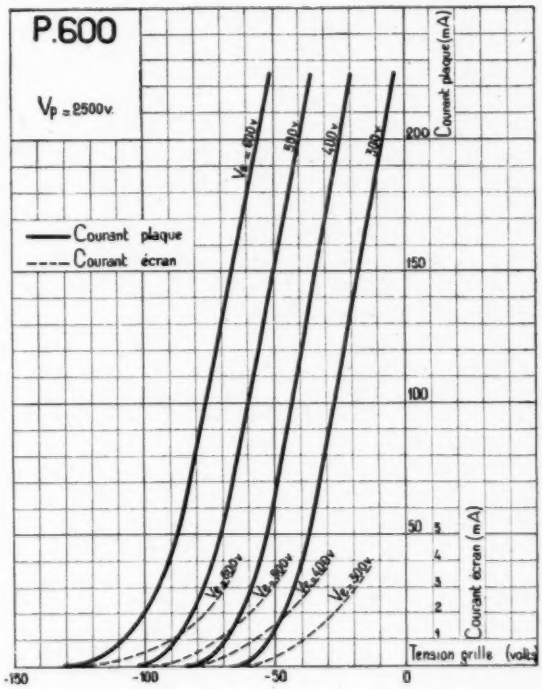


Fig. 25.

Il est possible de moduler cette lampe en basse fréquence en polarisant la grille d'arrêt à — 175 V

et en superposant à cette polarisation une tension de 125 V efficaces environ. Une puissance porteuse de 200 W est ainsi obtenue. A 7 m, la puissance oscillante est encore de l'ordre de 400 W.

La figure 25 donne les courbes du courant plaque et du courant écran en fonction de la tension grille.

La figure 26 donne les courbes du courant plaque

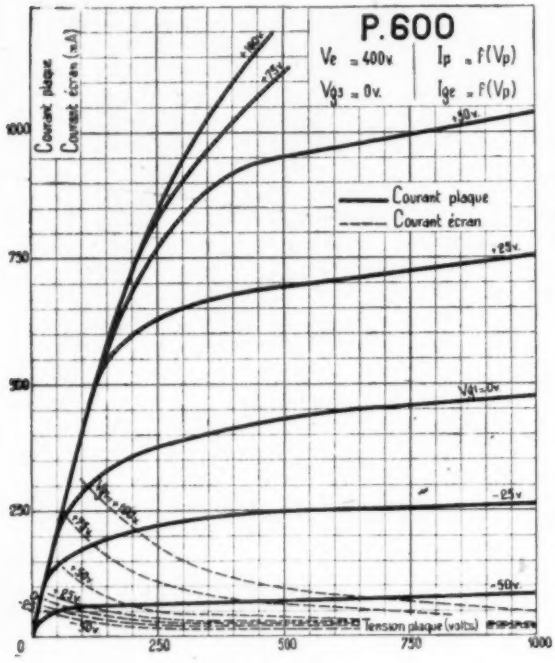


Fig. 26.

et du courant écran en fonction de la tension plaque (réseau de Kellog).

I. Lampe P 2/600.

Deux éléments P 600 réunis dans une même ampoule, constituent la lampe P 2/600.

La disposition adoptée est celle de la P 2/200, comme le montre la figure 27.

Les caractéristiques électriques de chaque élément sont celles de la P 600.

Les filaments sont connectés en parallèle dans l'ampoule.

Il en est de même des grilles écran et des grilles 3.

J. Lampe E 1876.

Cette lampe représentée par la figure 28 est une triode à circulation d'eau. Elle est de faible encombrement et peut être utilisée avantageusement en amplification H. F. ou B. F. (modulation classe B) grâce à des caractéristiques remarquables : grande

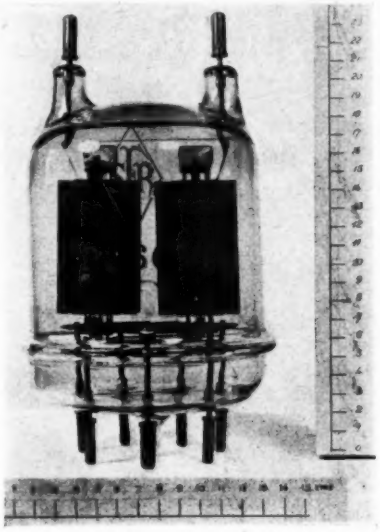


Fig. 27.

pente, faible résistance interne, coefficient d'amplification moyen, faible distorsion.

Ses éléments ont été déterminés de façon à répondre à toutes ces conditions avec le maximum d'efficacité.

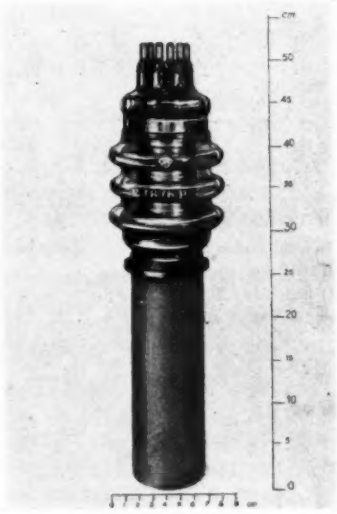


Fig. 28.

Ils ont été réalisés en utilisant toutes les ressources techniques modernes précédemment exposées. Ainsi,

on a fait usage du ballon ondulé, de la sortie grille annulaire de kovar, du pied-coupelle à sorties directes, d'une grille à fil fin et à pas serré raccordée à une sortie annulaire en kovar par un cylindre de faible inductance, de scellements verre-métal réalisés par haute fréquence avec toutes les conditions désirables de recuit et de centrage mécaniques des électrodes.

Le filament, de tungstène pur, peut être chauffé à volonté en courant continu ou en courant alternatif, mono, tri ou hexaphasé.

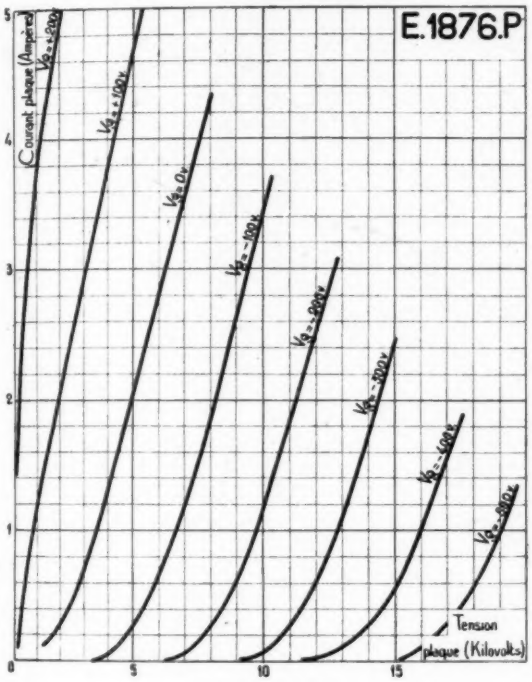


Fig. 29.

Cette lampe est d'un usage universel, mais elle est particulièrement étudiée pour être utilisée en étage d'amplification classe B. Dans ce cas, la puissance utile maxima avec distorsion du courant plaque inférieure à 15 % en crête, est de 30 kW pour $V_a = 15\,000$ V. L'anode peut dissiper 25 kW.

Les caractéristiques électriques sont indiquées ci-dessous :

Filament	(tungstène)
Tension de chauffage en monophasé	17,5 V
Courant de chauffage »	183 A
Tension anodique max	18 000 V
Courant anodique max	6 A
Dissipation anodique max	25 kW
Coefficient d'amplification	30
Pente pour $I_a = 1{,}5$ A	20 mAV
» » $I_a = 6$ A	33 mAV
Résistance interne pour $I_a = 1{,}5$ A	1 500 Ω
Courant de saturation	20 A
Capacités entre électrodes G. P	45 pF
Capacités entre électrodes F. P	3 pF
Capacités entre électrodes G. F	55 pF
Débit d'eau de refroidissement	20 l-mn

En régime télégraphique OL, la puissance utile peut atteindre 50 kW sous 18 000 V de tension anodique.

La figure 29 donne les courbes du courant plaque en fonction de la tension plaque.

K. **Lampe E 2056 P** (*fig.* 30).

Cette lampe est de construction analogue à celle de la E 1876 P, mais d'une puissance supérieure.

Fig. 30.

Elle a été calculée de façon à réaliser une puissance de 55 kW en porteuse, la lampe travaillant en modulation par contrôle d'anode à 15 000 V, avec un taux de distorsion de 5 à 6 %, à 90 % de modulation.

C'est également une lampe à chauffage polyphasé.

Les caractéristiques électriques sont indiquées ci-après :

Filament	(tungstène)
Tension de chauffage en monophasé	35 V
Courant de chauffage »	245 A
Tension anodique max	18 000 V
Courant anodique max	12 A

Dissipation anodique max. (régime dynamique)		100 kW
Coefficient d'amplification		30
Pente		15 mAV
Résistance interne		2 000 Ω
Courant de saturation		65 A
Capacités entre électrodes	G. P	72 pF
	F. P	4,5 pF
	G. F	60 pF
Débit d'eau de refroidissement		65 l-mn

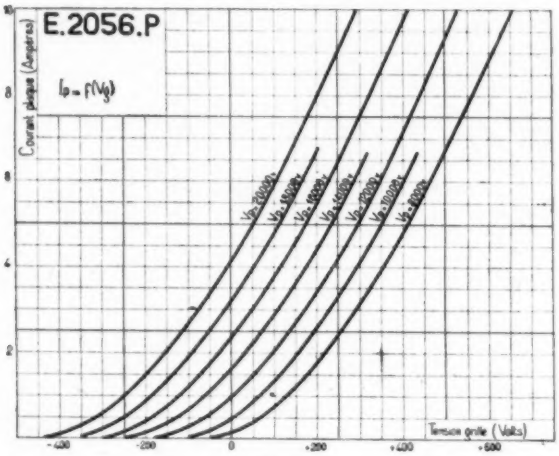


Fig. 31.

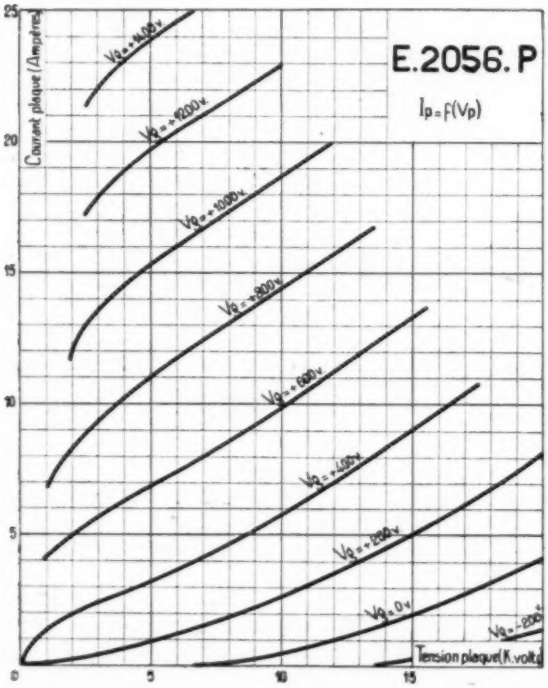


Fig. 32.

Les figures 31 et 32 donnent respectivement le courant plaque en fonction de la tension grille ou de la tension plaque.

L. Lampe E 3056 (*fig.* 33).

Cette lampe a été construite pour répondre aux demandes toujours croissantes de tubes dont la puissance est la plus élevée possible en ondes courtes

Fig. 33.

et elle y satisfait. Ainsi, en amplification H. F. classe C, avec modulation en contrôle d'anode, deux tubes permettent d'obtenir en régime de porteuse :

90 kW à 10 000 V pour 21 Mc
140 kW à 12 000 V pour 9 Mc

En ondes moyennes, en amplification classe B, la puissance utile délivrée par une lampe atteint 300 kW à 20 000 V.

Les principes adoptés sont analogues à ceux de la E 1876 P. On rencontre, cependant, une difficulté supplémentaire du fait des dimensions beaucoup plus grandes de la E 3056. La cathode est constituée par 24 brins de filament. Ceux-ci, rigoureusement sélectionnés, sont assemblés de telle manière qu'ils sont partiellement indépendants et que l'un d'entre eux peut subir un léger déplacement longitudinal sans déformer l'ensemble.

Les sorties filament ont été calculées pour supporter en permanence, sans échauffement nuisible, une intensité normale de près de 600 A, et ceci afin d'éviter tout refroidissement artificiel. Il en résulte une appréciable simplification pour l'exploitant.

Pour conserver un contact électrique de résistance

minimum, les sorties sont extérieurement dorées et argentées.

Les caractéristiques électriques sont données ci-après :

Filament	(tungstène)
Tension de chauffage	35 V
Courant de chauffage	575 A
Tension anodique max	18 000 V
Courant anodique max	25 A
Dissipation anodique max. (régime dynamique)	180 kW
Coefficient d'amplification	45
Pente pour $I_a = 5$ A	35 m AV
Résistance interne	1 300 Ω
Courant de saturation	170 A
Capacités entre électrodes — G. P	80 pF
Capacités entre électrodes — F. P	10 pF
Capacités entre électrodes — G. F	88 pF
Débit d'eau de refroidissement	250 l-mn

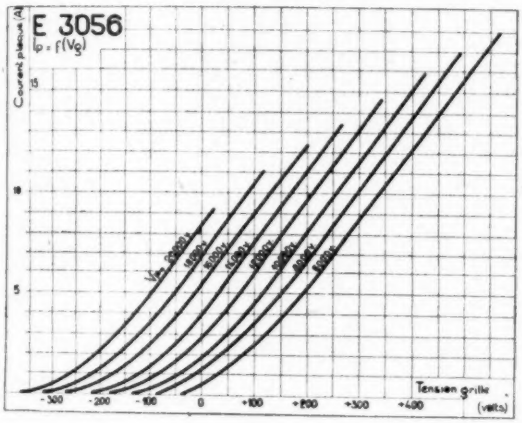


Fig. 34.

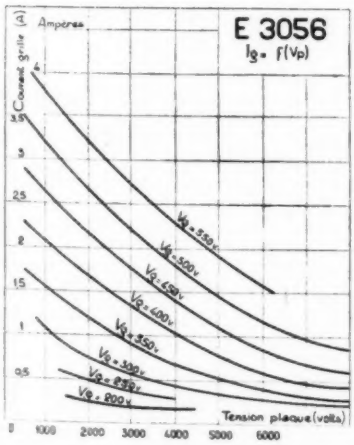


Fig. 35.

Les figures 34, 35 et 36 donnent respectivement les courbes du courant plaque en fonction de la

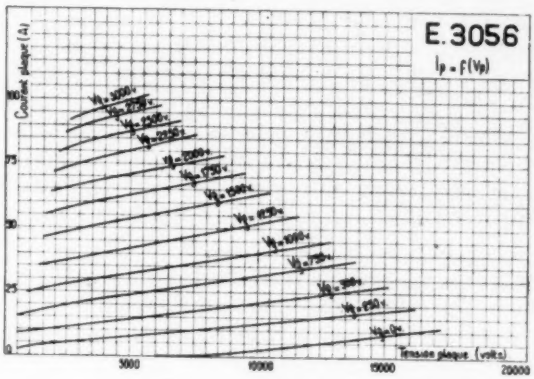


Fig. 36.

tension grille, les courbes du courant grille et du courant plaque en fonction de la tension plaque.

M. Lampe P 1806.

Cette lampe est une pentode à circulation d'eau dont la figure 37 donne une vue générale.

Fig. 37.

On distingue le ballon sphérique assurant l'isolement entre l'anode et l'anneau de sortie grille, qui correspond à G 3, les sorties G 1 et G 2 étant

disposées, ainsi que les deux sorties filament, dans le pied-coupelle.

Une telle disposition assure un blindage complet entre les électrodes d'entrée et de sortie (le cône de la grille G 3 forme écran électrostatique entre l'anode et les conducteurs et supports internes des grilles G 1 et G 2).

L'anode est de large dimension et la dissipation d'écran peut atteindre 2 kW en régime permanent sous une tension comprise entre 1 000 et 4 500 V, la tension d'anode atteignant 18 000 V.

Dans tous les cas, le courant de la grille de commande reste faible, et il en est de même de la puissance de commande.

Les caractéristiques électriques sont données ci-après :

Filament	(tungstène)
Tension de chauffage	22 V
Courant de chauffage	110 A
Tension anodique max	18 000 V
Courant anodique max	3 A
Dissipation anodique max	20 kW
Tension écran max	4 500 V
Dissipation écran max	2 kW
Courant de saturation	16 A
Coefficient d'amplification écran-grille 1	$K' = 7$
Pente pour $I_a = 2$ A	9 mA-V
Capacités interélectrodes — G 1-P	0,2 pF
Capacités interélectrodes — entrée	100 pF
Capacités interélectrodes — sortie	60 pF
Débit d'eau de refroidissement	25 l-mn

La figure 38 donne les valeurs du courant plaque et du courant écran en fonction de la tension plaque (réseau de Kellog).

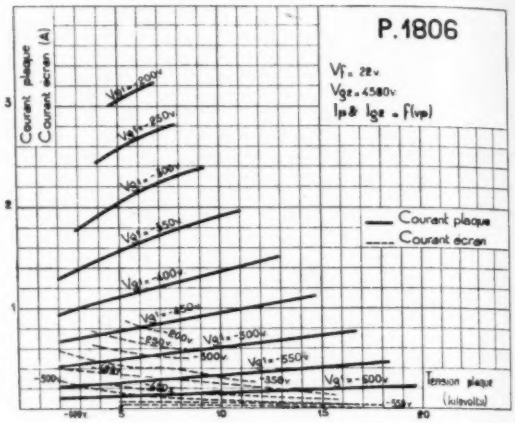


Fig. 38.

Nous venons de mettre en évidence l'effort accompli par nos ingénieurs durant ces dernières années, effort qui a permis à la Société Française Radioélectrique de présenter, sur le marché français, la série de lampes modernes que nous venons d'examiner.

Nos ingénieurs poursuivent leurs recherches et nul doute que, dans un proche avenir, nous puissions relater de nouveaux progrès accomplis dans une technique sans cesse améliorée.

LE NAVIGATEUR « DECCA »

PAR P. GIROUD,

Ingénieur, Chef du Service Aviation et Navigation de la Société Française Radioélectrique.

SOMMAIRE. — *Le navigateur Decca permet de connaître, à chaque instant, la position géographique d'un mobile par lecture directe de deux coordonnées. Il est basé sur la comparaison des phases de deux ondes entretenues pures émises par des émetteurs synchronisés.*

Une chaîne d'émission est constituée par quatre stations : une station pilote contrôlée par quartz et trois stations asservies dont les fréquences sont dans des rapports déterminés avec celle de la station pilote et dont les phases ont une valeur constante.

Les fréquences et les phases sont contrôlées automatiquement. Chaque réseau élémentaire constitué par la station pilote et une station asservie produit un réseau d'hyperboles d'égalité de phase imprimé sur la carte en une couleur caractérisant le réseau. Le récepteur reçoit séparément les ondes émises par les quatre émetteurs, les multiplie dans des rapports convenables et donne, sur les indicateurs, la mesure de la différence des phases des deux ondes transformées à même fréquence, provenant de chaque réseau élémentaire. Les indicateurs donnent directement, par un procédé de comptage, dans chaque réseau, les numéros des hyperboles les plus voisines et la position par rapport à ces hyperboles. Par report sur la carte, on obtient immédiatement le point. Un système d'identification des hyperboles permet de recaler le compteur sur le réseau.

Le navigateur Decca a été utilisé pour le débarquement de Normandie. Les applications sont nombreuses : navigation sur les continents et les océans, balisages des entrées de port, hydrographie, etc.

I. — INTRODUCTION.

Le problème de faire le point a été, depuis la plus haute antiquité, le souci dominant du navigateur. Les procédés utilisés ont été améliorés de siècle en siècle, d'année en année, mais tous nécessitent un personnel spécialisé et possédant des connaissances très étendues.

Un grand progrès a été fait, ces dernières années, par l'emploi de procédés radioélectriques. Avant d'entreprendre la description de la dernière méthode, le navigateur Decca, il est intéressant de faire une revue rapide des divers systèmes, de façon à pouvoir se faire une opinion sur les qualités de ces systèmes.

Les principaux procédés de navigation actuellement connus sont les suivants :

1. Radiogoniométrie à terre de signaux émis par l'avion ou le bateau.

Ce système, le plus ancien, nécessite l'installation à terre d'au moins deux radiogoniomètres, d'un système de communication entre ces deux stations et d'un émetteur pour renvoyer au mobile le point relevé.

La précision de ce système dépend de la précision des relèvements qui peuvent être pris par les radiogoniomètres et, par suite, de la puissance de l'émetteur de bord.

2. Radiogoniométrie à bord du mobile de signaux terrestres.

Ce procédé nécessite l'installation d'un radiogoniomètre à bord et demande une interprétation

des relèvements pour être utilisé comme procédé de navigation. Ce travail doit être fait par le pilote ou le navigateur. La précision dépend de la qualité du « zéro » et comme, en général, le cadre utilisé est de petites dimensions, il est nécessaire de travailler sur des stations terrestres de puissance élevee.

3. Utilisation à bord de radars « émetteur-répondeur ».

La position est déterminée par mesure des distances séparant le mobile de deux stations terrestres. Pour cet usage, le mobile transporte un émetteur qui déclenche le fonctionnement d'un « répondeur » au sol. La mesure est faite par détermination de temps de parcours du signal émis par l'avion retransmis par le répondeur et reçu à bord de l'avion.

Pour déterminer le point, il est nécessaire d'utiliser deux stations « répondeurs » ou d'avoir un moyen de déterminer la direction du « répondeur » par rapport au mobile.

Ce système exige l'emploi à bord d'un tube cathodique et la portée est limitée par la visibilité optique en raison des fréquences utilisées. La précision est bonne.

4. Radio-phares pour guidage de point à point.

Quatre lignes de signal continu sont produites par des transmissions en ondes moyennes, en signaux modulés ou manipulés.

Ce dispositif nécessite seulement à bord l'emploi d'un récepteur ordinaire, mais il ne permet de suivre que des routes fixes.

Il a pour résultat de concentrer tous les avions dans une même zone et, avec l'augmentation actuelle du trafic, il peut paraître dangereux.

5. Procédés hyperboliques.

Ces procédés déterminent, sur la carte, un réseau de lignes et permettent de fixer la position du mobile en un point quelconque du réseau.

Les premiers systèmes de ce type sont le G E E et le LORAN.

Les avantages principaux des systèmes hyperboliques sur les procédés rappelés précédemment sont les suivants :

la position du mobile peut être déterminée avec précision en un point quelconque de la zone couverte par les émetteurs;

le mobile peut suivre une route quelconque;

tous les mobiles peuvent utiliser le système en même temps.

Ces dispositifs augmentent considérablement la sécurité de la navigation. En outre, ils permettent des économies d'exploitation importantes par la possibilité de maintenir l'avion constamment sur la route la plus courte, ou sur la route la plus économique par déviation dans les régions de vent favorable.

Les systèmes G E E (anglais) et LORAN (américain) ont été développés pour des utilisations de guerre.

Le G E E fonctionne sur des ondes comprises entre 80 et 20 Mc qui suivent les lois de l'optique. Par suite, il est nécessaire, pour obtenir une grande portée, que l'avion vole à une altitude élevée, par exemple 5 000 m pour une portée de 500 km. Cette condition était sans importance pour des bombardiers qui opéraient à haute altitude, mais empêche l'utilisation sur des avions civils effectuant des trajets assez courts. D'autre part, le poids et l'encombrement des appareils de bord en interdisent l'emploi sur des avions de petit modèle. Sa portée optique réduit considérablement la portée d'utilisation pour les navires.

Un inconvénient commun aux deux systèmes G E E et LORAN est l'emploi, à bord, d'un tube cathodique pour la réception des impulsions émises par les stations terrestres, l'exploitation devant être assurée par un opérateur spécialement entraîné.

LORAN utilise des ondes de la bande de 1,7 Mc (170 m) et a une portée supérieure à G E E. Mais la portée est très différente sur terre et sur mer. D'autre part, les résultats de nuit doivent être interprétés avec beaucoup de soin pour déterminer si l'onde reçue est une onde directe ou une onde réfléchie.

Les deux systèmes G E E et LORAN nécessitent un personnel important pour l'exploitation des stations terrestres qui doivent être assez rapprochées les unes des autres.

C'est pour éviter ces inconvénients, qu'un Ingénieur américain, J. O'Brien, de la Société anglaise Decca, a imaginé un procédé radioélectrique utilisant des ondes entretenues pures qui permet au navigateur de connaître, à chaque instant, sa position géographique avec une précision plus grande que celle donnée par les moyens connus.

Ce procédé présente, sur les autres systèmes hyperboliques, les avantages suivants :

L'utilisation des ondes entretenues pures à émission continue conduit à des installations terrestres beaucoup plus simples.

L'emploi de longueurs d'onde de l'ordre de 3 000 m donne une grande portée à toute altitude.

L'indication est obtenue, à bord, par lecture directe

sur des cadrans. Par report sur des cartes spécialement préparées, le point est obtenu, instantanément, sans aucun calcul.

L'équipement récepteur ne nécessite pas de réglage et ses dimensions permettent de l'installer en un point quelconque de l'avion ou du bateau. Il travaille sur n'importe quel type d'antenne ayant une hauteur effective de 1 m.

L'étude a été entreprise en 1942 avec la collaboration du Département des Recherches et Expériences scientifiques de l'Amirauté britannique. La première expérience à grande échelle sur la côte Ouest de l'Écosse a été si brillamment réussie que l'Amirauté décidait de conserver secret le dispositif et de l'utiliser pour le débarquement en France. Les conditions imposées étaient de pouvoir diriger les navires de la côte anglaise à la côte normande dans les pires conditions atmosphériques avec brouillard artificiel, la précision devant être au moins égale à 100 m.

Quelques jours avant le « D day », les émetteurs nécessaires, montés sur camions, étaient installés sur la côte Sud de l'Angleterre et les navigateurs mis au courant de l'emploi des récepteurs.

Le jour du Débarquement, les résultats dépassèrent les prévisions et les opérations de déminage et d'accostage se déroulèrent avec une précision de l'ordre de 20 m.

Plus tard, les stations d'émission furent transportées en Belgique et utilisées pour la navigation des navires alliés dans l'embouchure de l'Escaut. Le rapport établi par la mission de l'Amirauté précisait que, sur l'Escaut, les erreurs maximum étaient de 7 m.

Enfin, après la guerre, l'Amirauté utilisa les mêmes stations pour le déminage de la Mer du Nord.

Entre temps, le Ministère de l'Air britannique s'était intéressé à la question et des officiers de la R. A. F. entreprenaient une série d'essais qui se révélèrent tout à fait satisfaisants. En particulier, un vol fut effectué sans visibilité jusqu'à Gibraltar.

Des essais sont en cours en vue de l'adoption du système pour la navigation maritime et aérienne.

II. — PRINCIPE.

Le « navigateur Decca » est basé sur la comparaison des phases de deux ondes entretenues pures, émises par deux émetteurs synchronisés.

Considérons (*fig.* 1) deux émetteurs A et B espacés géographiquement d'une distance S. Supposons que ces émetteurs rayonnent deux ondes de même fréquence f synchronisées.

Les champs rayonnés par les deux émetteurs sont de la forme

$$\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_1 \sin \omega t,$$
$$\mathcal{H}_B = \mathcal{H}_2 \sin(\omega t - \varphi),$$

formules dans lesquelles φ est l'angle de déphasage de l'émission B par rapport à celle de A.

$$\omega = 2\pi f$$

est la pulsation commune.

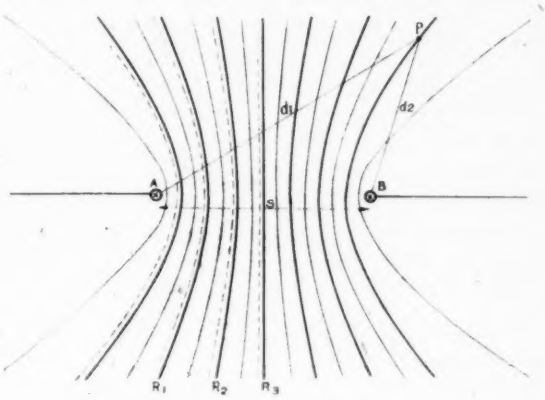


Fig. 1. — Réseau élémentaire d'hyperboles.

Prenons, sur la surface terrestre, supposée plane, un point P situé à des distances d_1 et d_2 des émetteurs.

Les champs, au point P, des ondes rayonnées par A et B sont de la forme

$$\mathcal{H}_{AP} = k_1 \mathcal{H}_1 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi d_1}{\lambda}\right),$$
$$\mathcal{H}_{BP} = k_2 \mathcal{H}_2 \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi d_2}{\lambda}\right),$$

en désignant par k_1 et k_2 les coefficients d'amplitude des signaux, λ la longueur d'onde correspondant à la fréquence f et à la pulsation ω.

La différence de phase des deux champs au point P est donnée par

$$\theta = 2\pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} + \varphi + 2k\pi,$$

k étant un nombre entier.

On tire de là

$$(1) \qquad d_1 - d_2 = (\varphi - \theta)\frac{\lambda}{2\pi} + k\lambda.$$

Pour une valeur déterminée de la différence de phase θ, $[d_1 - d_2]$ peut prendre un certain nombre de valeurs fixes dépendant seulement du coefficient k.

A chacune de ces valeurs correspond une hyperbole de foyers A et B.

En conséquence, le lieu géométrique des points de la surface terrestre où l'on reçoit les deux ondes émises par A et B avec une différence de phase déterminée θ, est une famille d'hyperboles homofocales.

En particulier, supposons que les deux émetteurs A et B soient en phase et que la distance géographique des émetteurs soit un nombre entier de longueurs d'ondes.

Cherchons le lieu géométrique des points où les deux émetteurs sont reçus en phase.

En faisant, dans l'équation (1),

$$\varphi = 0, \qquad \theta = 0,$$

il vient

$$d_1 - d_2 = k\lambda. \tag{2}$$

La longueur de l'axe focal d'une hyperbole de cette famille est

$$2a = d_1 - d_2 = k\lambda.$$

La distance des sommets des deux hyperboles consécutives est, par suite,

$$\frac{\lambda}{2}.$$

D'autre part, la distance des foyers étant

$$S = k'\lambda,$$

nous devons avoir la relation

$$2a \leq S,$$

c'est-à-dire

$$k \leq k'.$$

On en déduit le nombre des intervalles séparant deux hyperboles successives constituant la famille

$$N = 2k'.$$

Le nombre des hyperboles est, par suite,

$$N' = 2k' + 1.$$

Il y a lieu de remarquer que :

1° pour $k = 0$, $2a = 0$ et, par suite, l'hyperbole est confondue avec l'axe de symétrie perpendiculaire à l'axe focal;

2° pour $k = k'$, $2a = S$ et les hyperboles deviennent les demi-droites prolongeant l'axe focal de part et d'autre des foyers A et B.

Le réseau d'hyperboles ainsi déterminé est représenté en traits gras sur la figure 1.

De même, si l'on cherche le lieu des points où la réception est en opposition de phases, c'est-à-dire pour lesquels $\theta = \pi$, on trouve $2a = \frac{\lambda}{2} + k\lambda$, c'est-à-dire une famille d'hyperboles dans laquelle les sommets de deux hyperboles consécutives sont toujours distants de $\frac{\lambda}{2}$, mais décalés des sommets des hyperboles de l'autre famille de $\frac{\lambda}{4}$.

Ces hyperboles sont représentées en traits fins sur la figure 1.

Si, maintenant, nous donnons à θ une valeur quelconque, nous trouverons toujours que le lieu géométrique sera représenté par des hyperboles dans lesquelles la distance des sommets sera $2a = \theta\frac{\lambda}{2\pi} + k\lambda$. Dans ce cas, il y a lieu de remarquer que la différence de phase sera comptée algébriquement positivement à droite de l'axe transversal, négativement à gauche.

En résumé, deux stations, émettant des ondes synchronisées, de même fréquence, produisent, sur la surface terrestre, un réseau d'hyperboles correspondant à la réception en phase de ces ondes. De plus, pour un point se déplaçant toujours dans le même sens, sur une ligne coupant ces hyperboles, la différence de phases des ondes reçues varie d'une façon continue de 0 à 360°, d'une hyperbole à la suivante.

Dans tout ce qui suit, pour simplifier l'écriture, les hyperboles, correspondant à la réception en phase, seront désignées simplement par « hyperboles ».

Supposons un récepteur, placé dans le champ des deux émetteurs et pouvant recevoir, séparément, les ondes émises par les deux émetteurs A et B. A la sortie de ce récepteur, il est possible, à l'aide d'un phasemètre, de connaître la différence de phases des deux signaux reçus. Par suite, on peut déterminer la position du récepteur par rapport à deux hyperboles. Le récepteur se trouve donc situé sur des hyperboles telles que R_1, R_2 représentées en pointillé sur la figure 1. Mais cette indication ne permet pas de déterminer entre quelles paires d'hyperboles est situé le récepteur. Cette incertitude est levée par un procédé de comptage; le phasemètre est construit de façon telle que, pour un changement de phase de 360°, c'est-à-dire lorsque le récepteur se déplace d'une hyperbole à l'hyperbole voisine, l'aiguille indicatrice fait un tour complet du cadran. Par l'intermédiaire d'un jeu de pignons, l'aiguille entraîne un système de comptage du nombre de tours effectués par cette aiguille.

L'ensemble phasemètre-compteur, que nous appellerons indicateur, peut donc, d'une part, enregistrer le nombre d'hyperboles traversées correspondant à

la concordance de phases des deux émetteurs synchronisés et, d'autre part, situer le récepteur sur une hyperbole de phase déterminée par rapport à l'hyperbole voisine d'égalité de phases. Il suffit, alors, de numéroter les hyperboles et de régler, au départ, le compteur sur le numéro de l'hyperbole passant par le lieu considéré, pour que ce compteur enregistre chaque passage d'hyperbole et, par suite, indique le numéro de la courbe traversée par le récepteur. Il y a lieu de remarquer qu'il est nécessaire, au départ, de régler le compteur seulement, car l'aiguille de l'indicateur prend automatiquement la position correspondant à la différence de phase dans l'espace séparant deux hyperboles consécutives. Le cadran parcouru par l'aiguille est divisé en 100 parties; la position est donc obtenue, avec précision, entre deux lignes du réseau tracé sur la carte.

Comme nous l'avons indiqué précédemment, la mesure ainsi faite situe le récepteur sur une courbe telle que R_3, mais ne permet pas de connaître le point sur cette courbe.

Pour lever cette indécision, il est nécessaire de doubler le dispositif en utilisant un deuxième réseau d'hyperboles produites par un autre groupe d'émetteurs synchronisés.

En pratique, il est impossible de séparer, dans un récepteur, deux ondes de même fréquence. On utilise des émissions sur des ondes de fréquences différentes qui seront reçues dans deux voies distinctes du récepteur; ces fréquences sont dans un rapport tel, qu'après multiplication, elles puissent être amenées à une même fréquence. Le phasemètre compare les phases des deux réceptions sur la fréquence transformée. Le réseau d'hyperboles tracé sur la carte, correspond à cette fréquence.

Il en serait de même pour le deuxième groupe d'émetteurs, mais, pour simplifier l'installation au sol, on utilise, pour constituer le deuxième réseau, un des émetteurs du premier réseau. L'ensemble d'émission se compose donc de trois émetteurs synchronisés convenablement disposés, comme indiqué sur la carte (*fig.* 2), qui représente une installation type, utilisable pour la navigation dans un estuaire. Les emplacements des stations sont choisis de telle façon que l'angle de coupe des hyperboles, dans la région de plus grande utilisation, soit le plus grand possible. On voit, sur la carte, que dans l'estuaire de la Seine, cet angle est toujours supérieur à 75°. L'émetteur A est l'émetteur principal commun aux deux groupes, il émet, par exemple, sur la fréquence de 90 Kc/sec, l'émetteur B émet sur 120 Kc/sec, l'émetteur C sur 135 Kc/sec.

Les courbes imprimées sur la carte sont de deux couleurs différentes pour distinguer les réseaux d'hyperboles. Le réseau AB correspondant au groupe d'émetteurs A et B est imprimé en rouge, le réseau AC en vert, la lecture de la carte est ainsi grandement facilitée.

Le réseau d'hyperboles rouge AB tracé sur la carte correspond aux émissions A, 90 Kc/sec et B, 120 Kc/sec, c'est-à-dire à la fréquence commune de comparaison de 360 Kc/sec, soit $\lambda = 833$ m. La distance des sommets de deux hyperboles consécutives est donc de $\frac{\lambda}{2} = 416{,}50$ m. En raison de l'échelle réduite de la figure 2, il est impossible de représenter toutes les hyperboles; seules quelques courbes ont été figurées pour donner une vue d'ensemble du réseau.

De même, pour le réseau vert AC travaillant sur les fréquences de 90 et 135 Kc/sec, la fréquence commune est 270 Kc/sec correspondant à une longueur d'onde de 1110 m. La distance des sommets de deux hyperboles consécutives est donc de 555 m.

Remarquons enfin, pour terminer cet exposé général, que l'emploi de deux réseaux d'hyperboles conduit à un balisage incomplet de la surface terrestre.

Les régions situées dans le prolongement des axes focaux ne contiennent que des hyperboles très espacées et les hyperboles des deux réseaux se coupent suivant des angles très faibles ne donnant pas une précision suffisante. On est alors conduit à utiliser une chaîne d'émission en « étoile » constituée par un poste principal A et trois postes asservis B, C, D. Ces postes produisent trois réseaux d'hyperboles qui seront différenciés par des couleurs.

Les couleurs suivantes sont adoptées :

Réseau AB.....	rouge
» AC.....	vert
» AD.....	mauve

La figure 3 représente la première chaîne « étoile » en service dans le Sud-Est de l'Angleterre.

III. — RÉCEPTION.

Le récepteur est destiné à recevoir séparément les émissions de quatre émetteurs constituant une chaîne, à multiplier chacune de ces fréquences dans un rapport convenable, afin d'obtenir, pour chacun des réseaux, deux tensions de même fréquence qui sont, ensuite, appliquées à un phasemètre-indicateur.

La mesure de la différence de phase doit être évidemment indépendante de l'amplitude des signaux.

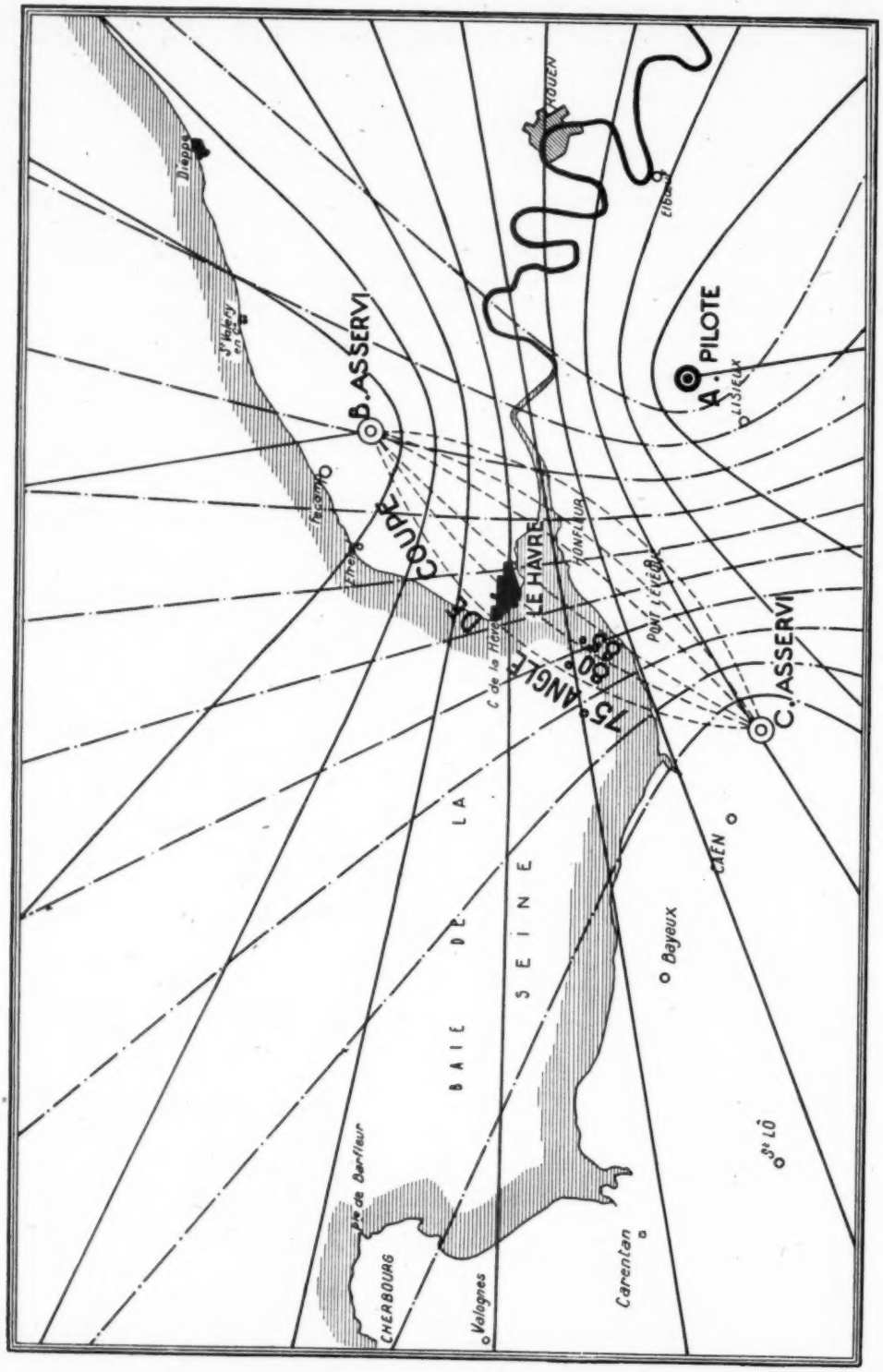


Fig. 2. — Chaîne type pour navigation dans un estuaire.

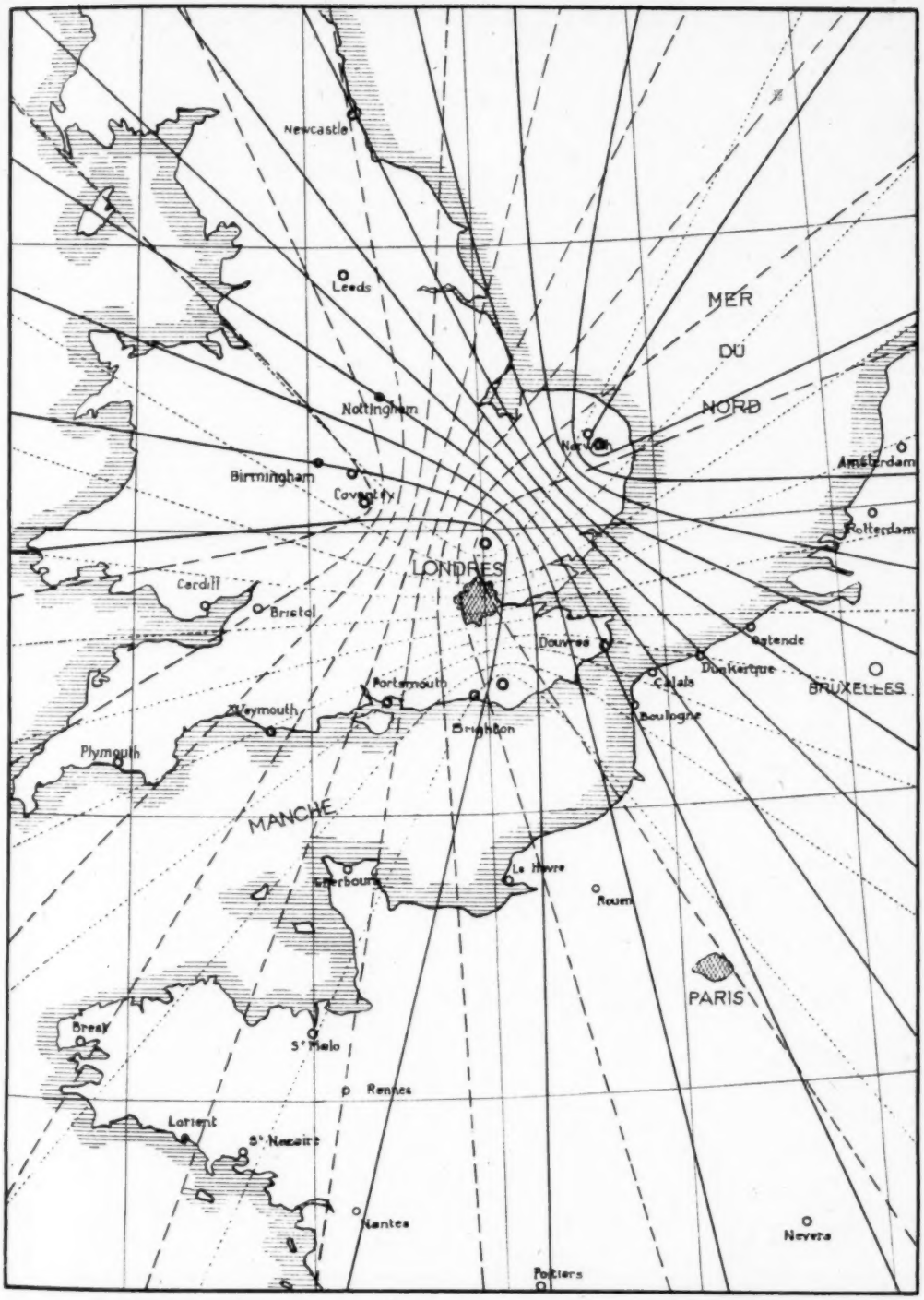


Fig. 3. — Chaîne étoile du Sud-Est de l'Angleterre.

Le récepteur.

Le récepteur comprend quatre amplificateurs sélectifs accordés respectivement sur les fréquences des émetteurs A, B, C, D que nous supposerons être

A.....	85	Kc/s
B.....	113,3	
C.....	127,5	
D.....	70,8	

Ces amplificateurs sont établis de telle sorte que la phase du signal amplifié soit à l'abri des variations accidentelles.

Comme on l'a vu précédemment, la comparaison des phases est faite sur deux tensions de même fréquence, pour chaque réseau élémentaire AB, AC, AD. Ces fréquences communes sont obtenues par multiplication des fréquences A, B, C, D.

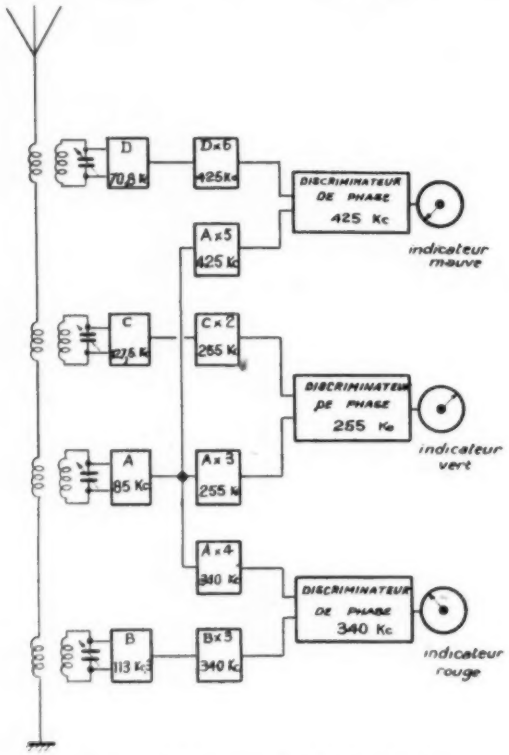


Fig. 4. — Schéma de principe du récepteur.

Pour le premier réseau rouge AB, les fréquences d'émission utilisées étant A = 85 Kc/sec, B = 113,3 Kc/sec, la comparaison de phase est faite sur la fréquence commune 340 Kc/sec obtenue en multipliant par 4 la fréquence A et, par 3 la fréquence B au moyen de multiplicateurs (*fig.* 4).

De même, pour le réseau vert AC, les fréquences A et C sont multipliées respectivement par 3 et 2 pour obtenir la fréquence commune 255 Kc/sec.

Enfin, pour le réseau mauve AD, la fréquence A est multipliée par 5 et la fréquence D par 6 pour faire apparaître la fréquence commune de 425 Kc/sec.

Les voies à même fréquence, dont il s'agit de comparer les phases, débitent dans un discriminateur de phase actionnant lui-même un indicateur.

Considérons le discriminateur correspondant au réseau rouge AB alimenté par les tensions u_A, u_B. Ces tensions sont déphasées, l'une par rapport à l'autre, d'un angle φ, qu'il s'agit de mesurer.

Elles sont de la forme

$$u_A = U_A \sin \omega t.$$

$$u_B = U_B \sin(\omega t - \varphi).$$

Ces deux tensions sont appliquées au circuit représenté figure 5 qui comporte deux parties identiques.

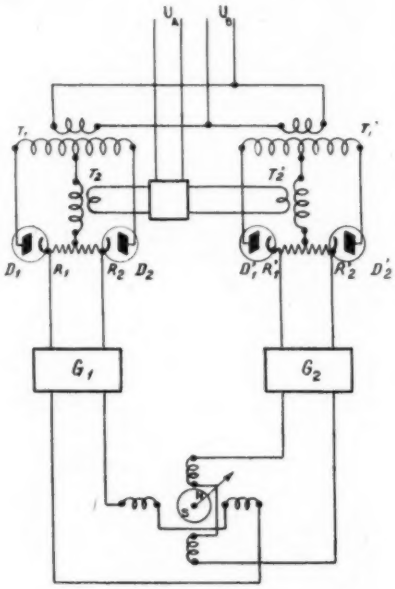


Fig. 5. — Schéma du discriminateur.

La tension u_B est appliquée au primaire du transformateur T_1 dont le secondaire débite dans deux diodes D_1 et D_2 montées en opposition.

La tension u_A est appliquée au primaire du transformateur T_2 dont le secondaire est branché entre le point milieu du secondaire du transformateur T_1 et le point commun aux deux résistances de charges R_1 et R_2 des diodes D_1 et D_2.

La tension recueillie aux bornes des résistances est appliquée à un enroulement de l'indicateur par l'intermédiaire d'un amplificateur à courant continu G_1.

Les deux tensions u_A et u_B sont également appliquées aux points correspondants d'un circuit identique constitué par les transformateurs T'_1, T'_2, les diodes D'_1, D'_2 et les résistances de charge R'_1, R'_2. Toutefois, la tension u_A n'est appliquée au transformateur T'_2 qu'après avoir subi une rotation de phase de 90°.

Étudions, par la méthode vectorielle (*fig.* 6), le fonctionnement du circuit contenant les transformateurs T_1 et T_2.

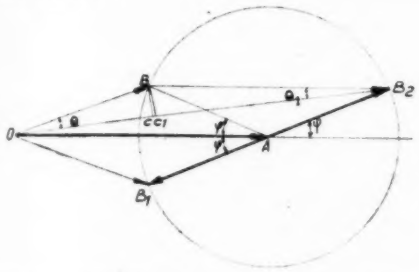


Fig. 6. — Diagramme vectoriel de fonctionnement du discriminateur.

La tension u_A appliquée au transformateur T_2 donne, dans le secondaire, une tension V_A que nous prendrons pour origine des phases et qui sera représentée par le vecteur $\overrightarrow{OA}$ sur le diagramme.

La tension u_B appliquée au transformateur T_1 donne, dans les deux moitiés de l'enroulement secondaire, des tensions V_B et $-V_B$ représentées en $\overrightarrow{AB_1}$ $\overrightarrow{AB_2}$.

Composons les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB_1}$, ils ont pour résultante $\overrightarrow{OB_1}$ qui représente la tension appliquée à la diode D_1.

De même, la résultante $\overrightarrow{OB_2}$ des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB_2}$ représente la tension appliquée à la diode D_2.

Du diagramme vectoriel, on tire

$$(1)\quad \begin{cases} \overline{OB_1}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB_1}^2 - 2\,\overline{OA}.\overline{AB_1}\cos\varphi, \\ \overline{OB_1}^2 = \overline{V_A}^2 + \overline{V_B}^2 - 2V_AV_B\cos\varphi, \\ \overline{OB_2}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB_2}^2 + 2\,\overline{OA}.\overline{AB_2}\cos\varphi, \\ \overline{OB_2}^2 = \overline{V_A}^2 + \overline{V_B}^2 + 2V_AV_B\cos\varphi. \end{cases}$$

Si la détection était quadratique, la tension recueillie aux bornes des résistances de charge R_1, R_2 serait proportionnelle à $V_A.V_B\cos\varphi$. De même, dans le deuxième circuit, la tension recueillie aux bornes des résistances de charge R'_1, R'_2 serait proportionnelle à $V_A.V_B\sin\varphi$.

Ces deux tensions appliquées, après amplification, aux deux bobines en croix de l'indicateur donneraient un champ résultant orienté par rapport à la première bobine suivant l'angle φ. Le barreau aimanté solidaire de l'aiguille s'orienterait aussi suivant l'angle à mesurer φ.

En réalité, les tensions V_A et V_B étant assez élevées, la détection se fait dans la partie rectiligne de la caractéristique. Il en résulte une erreur que nous allons calculer.

La tension continue aux bornes des résistances de charge R_1 et R_2 est proportionnelle à la différence $OB_2 - OB_1$.

Pour calculer cette différence, reportons le vecteur $\overrightarrow{OB_1}$ en $\overrightarrow{OB}$ et rabattons-le en $\overrightarrow{OC_1}$ sur $\overrightarrow{OB_2}$.

La tension redressée est égale à C_1B_2.

Joignons BB_2 et projetons le point B en C sur OB_2.

Désignons par θ l'angle $\widehat{BOB_2}$ et par θ_1 l'angle $\widehat{BB_2O}$.

Les valeurs relatives des tensions $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB_2}$, provenant des voies A et B étant, dans le récepteur, considérées maintenues par l'A. V. C. dans le rapport 2 à 1, l'angle θ est toujours suffisamment petit pour que l'on puisse confondre les points C et C_1. Le calcul rigoureux montre, d'ailleurs, que l'erreur introduite est de l'ordre de 1 % au maximum.

La tension redressée est alors CB_2, désignons-la par V_D.

Dans le triangle rectangle BCB_2, on a la relation

$$(3)\qquad V_D = CB_2 = \overline{BB_2}\cos\theta_1,$$

D'autre part, le triangle OBB_2 donne

$$(4)\qquad \overline{OB}^2 = \overline{OB_2}^2 + \overline{BB_2}^2 - 2\,\overline{OB_2}.\overline{BB_2}\cos\theta_1,$$

et le triangle BAB_2

$$(5)\qquad \begin{cases} \overline{BB_2} = 2\,\overline{AB_2}\cos\varphi, \\ \phantom{\overline{BB_2}} = 2V_B\cos\varphi. \end{cases}$$

L'équation (4) devient, en remplaçant $\overline{OB}^2 = \overline{OB_1}^2$ par sa valeur tirée de (1)

$$\begin{aligned} &V_A^2 + V_B^2 - 2V_AV_B\cos\varphi \\ &= V_A^2 + V_B^2 + 2V_AV_B\cos\varphi + 4V_B^2\cos^2\varphi \\ &\qquad - 4V_B\cos\varphi\cos\theta_1\sqrt{V_A^2 + V_B^2 + 2V_AV_B\cos\varphi}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\cos\theta_1 = \frac{V_A + V_B\cos\varphi}{\sqrt{V_A^2 + V_B^2 + 2V_AV_B\cos\varphi}}.$$

En reportant, dans l'équation (3), les valeurs de BB_2 tirées de (5), et de $\cos \theta_1$, il vient

$$V_D = 2V_B \cos\varphi \frac{V_A + V_B \cos\varphi}{\sqrt{V_A^2 + V_B^2 + 2V_A V_B \cos\varphi}}.$$

Puisque $V_D = 2\,V_B$, on peut écrire

$$(6) \qquad V_D = 2V_B \cos\varphi \frac{2 + \cos\varphi}{\sqrt{5 + 4\cos\varphi}}.$$

On trouverait de même, en étudiant le fonctionnement de la deuxième partie du discriminateur alimenté par la tension u_B et par la tension u_A déphasée de 180°, que la tension redressée recueillie aux bornes des résistances R'_1, R'_2 est

$$(7) \qquad V_{D'} = 2V_B \sin\varphi \frac{2 + \sin\varphi}{\sqrt{5 + 4\sin\varphi}}.$$

Le champ résultant dans les bobines fait, avec la bobine alimentée par V_D, un angle φ' tel que

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{V_{D'}}{V_D} = \frac{2V_B \sin\varphi \dfrac{2 + \sin\varphi}{\sqrt{5 + 4\sin\varphi}}}{2V_B \cos\varphi \dfrac{2 + \cos\varphi}{\sqrt{5 + 4\cos\varphi}}} = \frac{\dfrac{2 + \sin\varphi}{\sqrt{5 + 4\sin\varphi}}}{\dfrac{2 + \cos\varphi}{\sqrt{5 + 4\cos\varphi}}} \operatorname{tg}\varphi.$$

L'angle φ' lu sur l'indicateur diffère de l'angle réel φ d'une valeur définie par la formule ci-dessus.

L'erreur commise est indiquée dans le tableau ci-dessous :

Angle réel φ (°).	0	30	45	60	90	120	135	150	180
» lu φ' (°).	0	29	45	61	90	119	135	151	180

L'erreur commise est au maximum 1°. En ajoutant à cette erreur celle qui provient de l'assimilation faite plus haut, du point C au point C_1, l'erreur totale maxima est de l'ordre de 2°. Si l'on considère que la graduation de l'indicateur est faite en 100 divisions, l'erreur maxima est de l'ordre de la demi-division, par conséquent négligeable. Il serait possible, d'ailleurs, de supprimer complètement l'erreur en modifiant la graduation du cadran de l'indicateur, mais ceci conduirait à une complication de fabrication absolument inutile, sauf dans certains cas particuliers.

Dispositif de contrôle du récepteur.

Le récepteur étant destiné à mesurer des différences de phase, il est nécessaire que les circuits soient établis pour avoir une grande stabilité, même dans les conditions tropicales les plus sévères.

Malgré les précautions prises, il peut arriver, surtout au moment de la mise en service, que les déphasages des différents circuits varient légèrement, le dispositif suivant permet d'apporter la correction nécessaire : par simple manœuvre d'un commutateur, les signaux reçus sont remplacés par des signaux de référence provenant d'un oscillateur local unique.

Ces signaux étant rigoureusement en phase, les indicateurs doivent marquer zéro, un bouton permet la correction de la phase, au cas où cette condition n'est pas satisfaite.

Réalisation pratique du récepteur.

Le récepteur est réalisé sous plusieurs formes suivant l'usage auquel il est destiné :

— Un premier modèle, du type valise (*fig.* 7), est portatif et destiné, par exemple, aux pilotes

Fig. 7. — Récepteur type « Valise ».

d'entrée de port. Les indicateurs sont incorporés au récepteur. L'alimentation est obtenue par accumulateurs et piles contenus dans un coffret séparé.

— Le type Marine (*fig.* 8), alimenté sous 230 V, 50 p : sec ou 80 V, 1000 p : sec, comporte les boutons d'essais et de réglage.

Fig. 8. — Récepteur type « Marine ».

— Un modèle identique pour alimentation à courant continu est en voie de réalisation.

— Le récepteur, type aéronautique (*fig.* 9), est prévu pour alimentation 80 V alternatif 1000 p : sec ou 110-24-12 V courant continu.

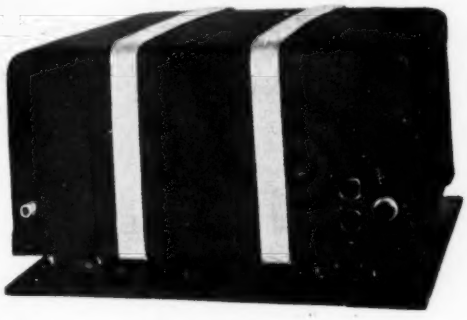


Fig. 9. — Récepteur type « Aviation ».

Ce modèle ne comporte pas de bouton de réglage, il peut être placé dans un point inaccessible de l'avion, les réglages se faisant directement sur l'indicateur.

Tous ces récepteurs peuvent être accordés, sans aucun réglage, sur les fréquences des différentes chaînes d'émetteurs.

Réalisation de l'indicateur.

Les indicateurs sont présentés sous la forme standard des appareils de tableau de bord (*fig.* 10); ils comportent une aiguille solidaire du barreau aimanté placé à l'intérieur des bobines en croix.

Fig. 10. — Indicateur de planche de bord.

Cette aiguille indique, par lecture directe sur le cadran correspondant, la position du mobile entre deux hyperboles consécutives d'égalité de phase. Le cadran est gradué de 0 à 1. L'ensemble, barreau aimanté-aiguille, peut tourner librement dans les deux sens.

Ce dispositif entraîne, par un train d'engrenages une seconde aiguille plus grande, dont l'axe est concentrique au premier, et qui se déplace d'une division pour une rotation complète de la première aiguille.

La grande aiguille donne, par lecture directe, le numéro de l'hyperbole de rang inférieur, la plus voisine et commande, par un train d'engrenages, un disque faisant défiler, devant une fenêtre, des lettres correspondant chacune à un groupe d'hyperboles, le changement de lettre étant opéré pour un tour complet de la grande aiguille.

La lecture de la lettre, suivie du nombre donné par la grande aiguille, identifie l'hyperbole de rang inférieur la plus voisine du lieu où se trouve le récepteur.

La lecture de la petite aiguille précise la position du récepteur par rapport à cette hyperbole.

Il y a lieu de remarquer que, dans l'exposé général, fait au début de cette étude, nous avions indiqué une numérotation des hyperboles de 1 à *n*. L'indicateur devrait donc donner des lectures numériques. En réalité, les nombres donnés par l'indicateur comportent une lettre suivie de chiffres; nous verrons, plus loin, à quoi correspond ce nouveau système de numérotation (*voir* § 5 : Identification des hyperboles).

Pour la commodité de l'utilisation, les indicateurs sont peints de la couleur correspondant au réseau sur lesquels ils fonctionnent et, par conséquent, aux couleurs des lignes correspondantes sur les cartes.

On évite ainsi toute erreur.

D'autre part, sur chaque indicateur, deux boutons sont prévus :

a. pour la vérification du fonctionnement correct de la voie correspondante du récepteur, par contrôle du zéro au moyen de l'oscillateur de référence et correction éventuelle par rotation des bobines;

b. pour le calage du disque et de la grande aiguille sur le numéro de l'hyperbole de rang inférieur la plus voisine du point où l'on se trouve, lors de la mise en service ou au cours de l'identification.

En outre, un troisième bouton est prévu sur un seul des indicateurs pour vérification du fonctionnement de l'ensemble du réseau.

Un relais situé dans le récepteur et commandé par ce bouton ajoute une capacité supplémentaire dans l'un des circuits accordés de la chaîne principale provoquant ainsi une rotation de phase sur les trois indicateurs.

S'il n'y a pas de rotation, le système ne fonctionne pas.

S'il n'y a rotation que sur deux indicateurs seulement, le troisième esclave est arrêté.

IV. — ÉMISSION.

Une chaîne d'émission comporte quatre stations disposées en étoile (*fig.* 3). La station centrale A est la station pilote qui commande les trois stations asservies B, C, D.

Ces stations peuvent être réalisées sous des formes différentes, mais le principe du fonctionnement est toujours le même. La station pilote est composée d'un émetteur, à ondes entretenues pures, stabilisé par quartz. Les stations B, C, D sont également constituées par de simples émetteurs à ondes entretenues pures; mais, comme les fréquences de ces postes satellites doivent être dans des rapports bien déterminés avec la fréquence de la station pilote et que, d'autre part, les phases de leurs émissions doivent être fixées par rapport à celle de la station principale, il est indispensable que ces deux éléments soient contrôlés par la Station principale elle-même.

Ce contrôle est effectué, purement par voie radio, de la façon suivante :

Considérons le réseau rouge AB, par exemple (*fig.* 11); la station B comporte une antenne verticale

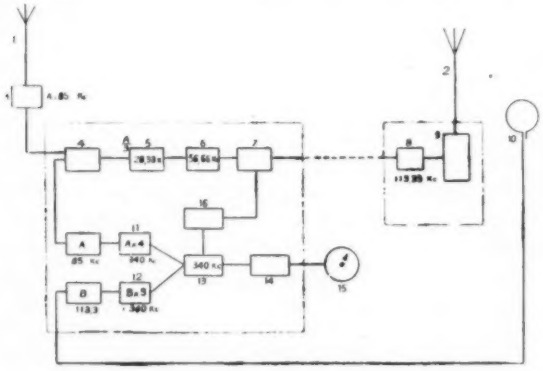


Fig. 11. — Schéma de principe de la synchronisation et du contrôle de la phase d'un émetteur asservi.

de réception située à une certaine distance de l'antenne d'émission 2.

La tension de la station A, induite dans l'antenne, est transmise au récepteur de contrôle par l'intermédiaire d'une unité de couplage 3 comportant un système de filtrage pour éliminer la fréquence rayonnée par l'émetteur asservi.

Le récepteur comprend deux parties :

a. un dispositif de synchronisation de la fréquence;
b. un dispositif de contrôle de la phase.

Synchronisation de la fréquence.

La tension à la fréquence de A = 85 Kc/sec est appliquée à l'entrée d'un amplificateur sélectif 4 dont la sortie commande un démultiplicateur 5 donnant une fréquence trois fois plus faible, soit 28,33 Kc/sec.

Ce démultiplicateur est suivi d'un doubleur de fréquence 6 donnant ainsi une fréquence de 56,66 Kc/sec qui, après passage dans le dispositif de contrôle de phase 7 est transmise par une ligne aux étages de commande de l'émetteur. Ces derniers portent cette fréquence à 113,3 Kc/sec par le doubleur 8 et l'appliquent à l'étage de puissance 9 alimentant l'antenne.

Contrôle de la phase.

Ce contrôle comprend deux opérations :

a. Le réglage de la phase de l'émetteur B par rapport à la phase A, en fonction de l'écartement géographique des différents éléments.

Ce réglage est manuel et opéré directement sur le panneau 7.

b. La vérification de la constance de la phase et la compensation automatique des variations accidentelles de celle-ci.

Pour comparer les phases des émissions de A et de B, on utilise un récepteur à deux voies, identique au récepteur décrit précédemment. La voie A est alimentée par l'antenne 1, la voie B par une ligne venant d'une boucle 10 située à proximité de l'antenne d'émission.

Après multiplication dans les multiplicateurs 11 et 12, les tensions à la fréquence commune de 340 Kc/sec sont appliquées à un discriminateur 13.

Ce discriminateur alimente, par l'intermédiaire d'un amplificateur 14 un indicateur de contrôle 15. D'autre part, une des tensions continues produites par le discriminateur est déviée et appliquée aux grilles des lampes à réactance constituant le dispositif de réglage automatique de phase.

Avec ce système, on obtient, en pratique, un réglage tel que la variation de phase ne dépasse pas ± 0,5 division.

De plus, au poste principal A, une station de réception permet de recevoir les émissions des

quatre postes constituant la chaîne et de contrôler, en permanence, la stabilité des phases relatives.

Réalisation pratique.

Les stations mobiles destinées à des usages temporaires sont constituées par des émetteurs de quelques centaines de watts montés sur camions qui alimentent chacun une antenne formée par un mât télescopique de 30 m de haut. Ces mâts sont haubannés et isolés à la base.

Le récepteur de contrôle est placé à une certaine distance du camion d'émission et est relié à celui-ci par une ligne en câble souple blindé.

Les stations fixes destinées à baliser, d'une façon permanente, les espaces maritimes ou aériens, sont constituées par des émetteurs de 2 kW alimentant des antennes de 100 m de haut environ. Ces antennes (*fig.* 12) sont formées par des pylônes, isolés à la base, supportant un croisillon qui permet de constituer, au moyen de fils, une double pyramide de façon à augmenter, le plus possible, la capacité terminale de l'antenne, tout en maintenant le rayonnement zénital à une valeur aussi faible que possible.

V. — IDENTIFICATION DES HYPERBOLES.

Le système Decca fonctionne par comptage et nécessite un calage du compteur au départ. Si l'on imagine un mobile venant d'une région dans laquelle il n'existe pas de chaînes d'émission, ou, qu'à la suite d'un incident, le compteur a cessé d'enregistrer les hyperboles traversées, il est indispensable de pouvoir régler le compteur sur le numéro de l'hyperbole de rang inférieur la plus voisine.

Deux méthodes d'identification ont été proposées que nous allons exposer successivement.

Première méthode.

Ce dispositif permet de lever l'incertitude en trois périodes successives dont la durée totale n'excède pas 20 sec.

Prenons l'exemple de deux émetteurs A et B rayonnant des ondes synchronisées sur des fréquences de 85 Kc/sec et 113,3 Kc/sec. La fréquence de comparaison est 340 Kc/sec correspondant à une longueur d'onde de 882,35 m. La distance des émetteurs étant supposée de 100 longueurs d'onde, le nombre de chenaux est 200.

Considérons un récepteur placé dans le champ de rayonnement de ces émetteurs. Le phasemètre indique la différence de phase des deux ondes reçues en ce point et permet de situer la position du récepteur à l'intérieur des chenaux, mais sans pouvoir préciser le chenal.

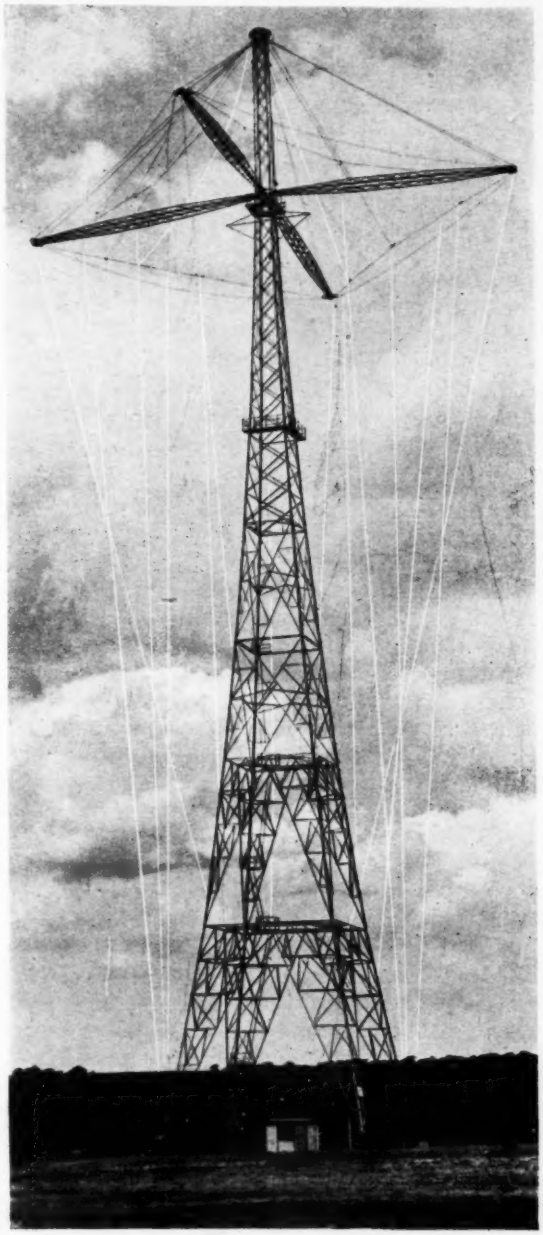


Fig. 12. — Pylône d'antenne.

Représentons (*fig.* 13) à grande échelle une portion du réseau d'hyperboles.

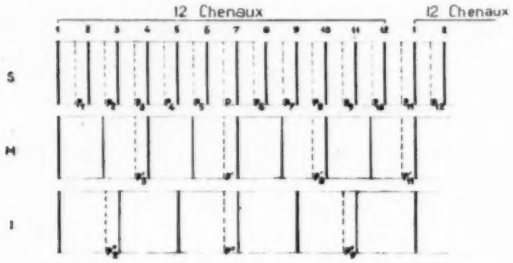


Fig. 13. — Identification des hyperboles.
Détermination de la position dans un groupe de 12 chenaux.

Le récepteur se trouve en un point quelconque des lignes P_1, P_2, P_3, ... représentées en pointillé dans la partie supérieure S de la figure.

Premier groupement en 3 chenaux.

Les stations d'émission continuant à émettre, d'une façon permanente sur les fréquences A 85 Kc/sec et B 113,3 Kc/sec, faisons émettre, par le poste A, une deuxième onde à la fréquence de B, soit 113,3 Kc/sec et synchronisée avec B.

Les ondes de même fréquence 113,3 Kc/sec, émises des deux points A et B arrivent au récepteur avec une différence de phase dépendant de la position du récepteur. Ces deux ondes se composent et le résultat est, en définitive, identique à une rotation de phase du signal recu de B. L'aiguille de l'indicateur, actionnée par les voies A et B, change de position et met ainsi en évidence cette différence de phase.

Si le récepteur se trouve en un point tel que les deux ondes à 113,3 Kc/sec émises par A et B arrivent en phase ou en opposition de phase, la phase de la somme des deux ondes à 113,3 Kc/sec n'est pas modifiée. L'aiguille de l'indicateur conserve la position qu'elle avait dans le système d'émission A 85 Kc/sec et B 113,3 Kc/sec.

On voit donc, qu'en définitive, l'indicateur va mettre en évidence la différence de phase des deux émissions de même fréquence 113,3 Kc/sec émises des deux points A et B. Nous savons que deux émetteurs synchronisés produisent des hyperboles d'égalité de phase dont le nombre est fonction de la longueur d'onde, donc de la fréquence. Dans le fonctionnement normal A 85 Kc/sec, B 113,3 Kc/sec, le nombre de chenaux séparant les hyperboles était de 200, la comparaison de phase était faite sur la fréquence de 340 Kc/sec.

Dans le cas actuel, la comparaison de phase est faite directement sur la fréquence de 113,3 Kc/sec. Le nombre des chenaux est proportionnel à la fréquence : il est, par suite, trois fois plus petit qu'en fonctionnement normal. Supposons que le récepteur occupe une position fixe. Dans le système d'émissions A 85 Kc/sec et B 113,3 Kc/sec, l'aiguille du phasemètre a une position déterminée F; lorsque nous ajoutons l'émission A 113,3 Kc/sec, l'aiguille prend une position F′ différente de F et fonction de la différence de phase, à la réception, des deux ondes 113,3 Kc/sec.

Si nous faisons tourner de 180° la phase de l'émission secondaire A 113,3 Kc/sec, les hyperboles correspondant à la réception en égalité de phase ou en opposition de phase, des deux signaux A 113,3 Kc/sec et B 113,3 Kc/sec, vont se déplacer.

L'aiguille de l'indicateur qui occupait initialement la position F′ va se mouvoir; elle passera par la position F lorsqu'une ligne d'égalité de phase ou d'opposition de phase des deux signaux 113,3 Kc/sec passera par le récepteur, puis elle déviera en sens inverse.

On conçoit que si la rotation de phase à l'émission est faite de façon régulière, il est possible d'apprécier la position du récepteur par rapport à la position initiale de deux lignes d'égalité de phase.

Cette détermination pourrait être faite, en mesurant les temps pendant lesquels l'aiguille dévie d'un côté, puis de l'autre de la position F. Cette mesure, qui n'a pas besoin d'être précise, est simplifiée de la façon suivante :

L'émission A 113,3 Kc/sec est manipulée de telle façon que 10 points soient émis en 10 sec. Au début de l'opération, les signaux émis de A et B sont en phase. A chaque émission d'un point, la phase est tournée de 20°, de telle façon qu'à la fin de l'émission des points, la phase ait subi 180° de rotation.

Examinons ce qui se passe pour un récepteur situé dans la position P′ représentée dans la partie médiane M de la figure 13. A l'émission du premier point, les signaux émis par A et B sur 113,3 Kc/sec sont en phase. A ce moment, si l'on considère les lignes d'égalité de phase des deux ondes à 113,3 Kc/sec il est évident que ces lignes coïncident avec des hyperboles du premier réseau et occupent les positions représentées en traits forts dans la partie médiane M de la figure 13 et sur la figure 14 *b*.

Représentons, sur la même figure (14 *b*) en traits fins, les hyperboles correspondant à la réception,

en opposition de phase des deux signaux à 113,3 Kc/sec, le récepteur P′ se trouve à droite d'une de ces lignes. A la réception, les deux signaux A et B 113,3 Kc/sec ont les phases et les amplitudes relatives indiquées sur la figure 14 *a*, le signal résultant a tourné d'un angle α. Par conséquent, l'aiguille de l'indicateur qui occupait la position fixe F dans le réseau initial A 85 Kc/sec et B 113,3 Kc/sec va subir une impulsion dans un certain sens (à droite dans le cas considéré).

A l'émission du deuxième point, la phase du signal A 113,3 Kc/sec a tourné de 20°, le diagramme de réception est celui indiqué figure 14 *a*; l'aiguille de l'indicateur reçoit une impulsion de même sens que pour le premier point; le réseau des lignes d'égalité et d'opposition de phase s'est déplacé vers la droite, comme indiqué sur la figure 14 *b*.

Jusqu'au sixième point, le sens des impulsions de l'aiguille est le même, mais l'amplitude diminue.

Au septième point, les deux ondes à 113,3 Kc/sec sont reçues sensiblement en opposition de phase, l'aiguille de l'indicateur reste immobile. A ce moment, le réseau d'hyperboles 113,3 Kc/sec a glissé de telle façon qu'une ligne d'opposition de phase passe par la position P′ (*fig.* 14 *b*).

Du huitième au dixième point, on voit, sur la figure 14 *b*, que la position P′ se trouve à gauche de la ligne d'opposition de phase et sur le diagramme de réception (*fig.* 14 *a*) que l'angle change de sens. Par suite, pour ces trois derniers points, l'aiguille de l'indicateur subit des impulsions vers la gauche, d'amplitudes croissantes.

Au dixième point, la phase de l'émission secondaire A 113,3 Kc/sec a tourné de 180° et le réseau d'hyperboles 113,3 Kc/sec a glissé de telle sorte que les hyperboles d'opposition de phase ont pris la place des hyperboles d'égalité de phase dans l'émission du premier point.

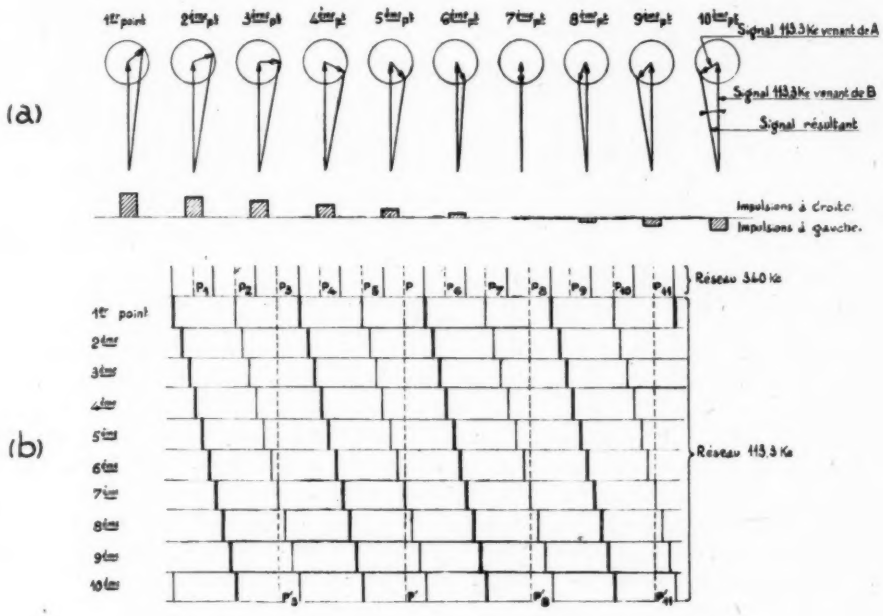


Fig. 14. — Groupement en 3 chenaux. Diagramme de réception.

Le rapport du nombre d'impulsions de l'aiguille à droite et du nombre d'impulsions à gauche, ainsi que le sens de la première impulsion, nous fixe la position du récepteur à l'intérieur des chenaux à 113,3 Kc/sec. Par suite, le récepteur peut occuper les positions P′, P'_3, P'_8, P'_{11}. Nous avons éliminé toutes les autres positions qui étaient possibles telles qu'elles étaient représentées en P_1, P_2, P_4, ...

Reportons les positions P′, P'_3, P'_8, P'_{11} sur la partie M de la figure 13. Ce sont les seules positions qui peuvent être occupées par le récepteur.

Deuxième groupement en quatre chenaux.

Les stations ont repris leur fonctionnement normal, A 85 Kc/sec et B 113,3 Kc/sec.

Ajoutons au poste B une émission à 85 Kc/sec qui sera également manipulée en 10 points, la phase tournant de 20° à chaque point. Comme dans le cas précédent, nous observons que l'aiguille de l'indicateur est soumise à une série d'impulsions, mais, celles-ci dans l'exemple choisi, sont d'abord à gauche, puis à droite.

Le rapport de ces nombres d'impulsions et le sens de la première, permettent de situer le récepteur à l'intérieur d'un chenal du nouveau réseau de ligne à 85 Kc/sec. Ce réseau qui correspond à une fréquence quatre fois plus petite que la fréquence de comparaison 340 Kc/sec comporte quatre fois moins de chenaux, il est représenté dans la partie inférieure I de la figure 13. Le récepteur peut occuper les positions P''_1, P''_2, P''_9.

Groupement en 12 chenaux.

L'examen de la figure 13 montre que :

1° Dans le système d'émission normal A 85 Kc/sec et B 113,3 Kc/sec, la lecture de la phase situe le récepteur entre deux hyperboles consécutives sur les lignes P_1, P_2, P_3, ...

2° Dans le système d'émission à 113,3 Kc/sec, les positions occupées par le récepteur ne peuvent être que P'_3, P', P'_8, P'_{11}.

3° Dans le système d'émission à 85 Kc/sec, les positions occupées par le récepteur ne peuvent être que P''_2, P'', P''_9. La seule position possible du récepteur est la position commune aux trois systèmes, c'est-à-dire P, P', P''. Le récepteur est donc situé à l'intérieur d'un groupe de 12 chenaux.

La concordance des positions est facilitée par l'utilisation d'un calculateur.

Il reste, maintenant, à déterminer dans quel groupe de chenaux il se trouve.

Détermination du groupe de 12 chenaux.

Le réseau d'hyperboles tracé sur la carte, correspond aux émissions A 85 Kc/sec et B 113,3 Kc/sec, c'est-à-dire à la fréquence commune 340 Kc/sec. Ces hyperboles seront groupées par 12. Chaque groupe sera représenté par une lettre A, B, C et, dans chaque groupe, les lignes seront numérotées de 1 à 12 (*fig.* 15), les opérations décrites dans les paragraphes précédents ont situé le récepteur entre deux lignes 6 et 7, le phasemètre donnant sa position exacte entre ces deux lignes. Les postes ayant repris leurs émissions normales, l'aiguille du phasemètre a une position déterminée F.

Augmentons les fréquences d'émission des deux émetteurs A et B d'un même pourcentage, les deux émissions restant synchronisées, de façon à augmenter le nombre d'hyperboles d'une unité.

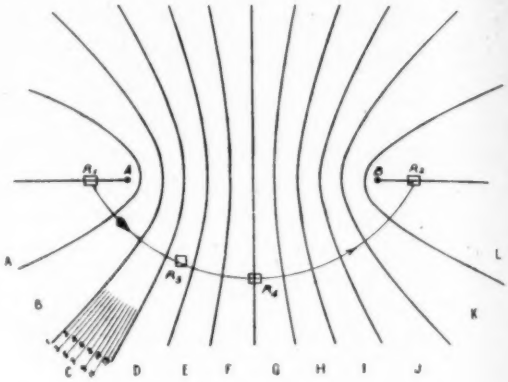


Fig. 15. — Procédé de détermination de la lettre caractéristique du groupe.

Si nous considérons un récepteur qui se déplace de R_1 à R_2, l'indicateur fera un tour complet de plus qu'il ne l'aurait fait dans le cas d'émissions normales. Au cours du trajet, l'aiguille se déplace d'une fraction de tour supplémentaire dépendant du trajet parcouru. Par exemple, en R_3, l'aiguille se déplace d'un quart de tour en plus, en R_4 d'un demi-tour, etc., on voit donc que le déplacement de l'aiguille au moment du changement de fréquence permet de déterminer la position approximative du récepteur dans le réseau complet d'hyperboles.

Pratiquement, cette détermination est facilitée par l'adjonction sur le cadran de l'indicateur, d'un

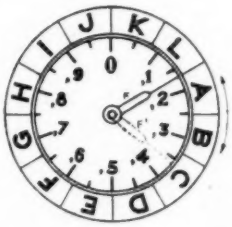


Fig. 16. — Cadran mobile pour la détermination de la lettre caractéristique du groupe d'hyperboles.

cadran mobile divisé en plusieurs secteurs portant les lettres d'identification des groupes d'hyperboles (*fig.* 16). Avant le changement de fréquence, l'aiguille de l'indicateur occupe la position F. Le cadran porte-lettres est tourné pour que le repère

correspondant au début du groupe A, vienne en coïncidence avec l'aiguille. Au moment du changement de fréquence, l'aiguille dévie d'un angle dépendant de la position du récepteur dans le réseau d'hyperboles; elle prend donc une position F′ et il suffit de lire, sur le cadran, la lettre indiquée pour connaître le groupe dans lequel on se trouve, soit C dans l'exemple choisi.

De toutes les observations précédentes, nous pouvons conclure que la position du récepteur se trouve entre les hyperboles C 6 et C 7; le phasemètre donnant la position exacte entre ces deux hyperboles, la position du récepteur est ainsi parfaitement déterminée.

Deuxième méthode.

Le procédé d'identification des hyperboles qui a été décrit ci-dessus nécessite deux comptages d'impulsions et l'emploi d'un calculateur pour trouver le numéro de la ligne, puis la détermination du groupe d'hyperboles par lecture directe sur un cadran. L'opération a une durée de 20 sec environ.

Si l'on considère l'utilisation du système Decca par un mobile lent tel qu'un navire, cette durée d'identification est parfaitement admissible, mais, dans le cas d'emploi sur un mobile rapide tel qu'un avion, la durée de 20 sec correspond, dans certains cas, au franchissement d'un ou plusieurs chenaux séparant deux hyperboles. Par suite, l'identification peut être douteuse. D'autre part, le procédé exige, de l'opérateur, une certaine attention puisqu'il est obligé de compter les impulsions, d'en observer le sens et d'utiliser un calculateur.

Pour obvier à ces inconvénients, un deuxième procédé a été imaginé, qui permet de faire l'identification d'une façon plus simple, plus rapide et quasi automatique.

Considérons un reseau « étoile » à 4 émetteurs, 1 poste pilote A et 3 postes asservis B, C, D.

Pour simplifier l'exposé, nous supposerons que ces stations émettent sur les fréquences suivantes :

A	60 Kc/s
B.....	80
C.....	90
D.....	50

Identification des lignes du réseau rouge (postes A et B).

Supprimons, pour un temps très court, les émissions des postes C et D et mettons hors circuit les indicateurs correspondants. Superposons, à l'émission de A 60 Kc/sec, une deuxième émission à fréquence de 50 Kc/sec. De même, faisons émettre, au point B, 80 Kc/sec une fréquence supplémentaire de 90 Kc/sec. Le système d'émission est devenu

A	60 + 50 Kc/s
B.....	80 + 90

Le récepteur (*fig.* 17) qui comporte quatre voies recevant respectivement les fréquences 60, 50, 80 et 90 Kc/sec sera alimenté par ces mêmes fréquences, mais provenant uniquement des stations A et B.

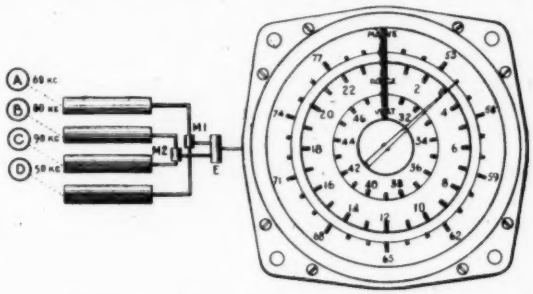


Fig. 17. — Cadran identificateur d'hyperboles.

Les voies du récepteur A et D d'une part, B et C d'autre part, débitent dans deux mélangeurs M_1 et M_2 qui délivrent à la sortie des tensions d'interférence, à la fréquence de 10 Kc/sec.

Ces deux tensions sont appliquées à un discriminateur E analogue aux discriminateurs du récepteur, qui actionne un indicateur I de construction identique à celle des indicateurs habituels. Dans le fonctionnement normal, la fréquence de comparaison était de $60 \times 4 = 80 \times 3 = 240$ Kc/sec. Dans le fonctionnement que nous venons de décrire, la fréquence de comparaison est devenue 10 Kc/sec. En conséquence, le nombre de chenaux sera 24 fois plus faible.

La phase donnée par l'indicateur situe le récepteur à l'intérieur d'un chenal à 10 Kc/sec et permet ainsi d'identifier 1 chenal sur 24 du réseau à 240 Kc/sec.

L'indicateur utilisé est gradué directement de 1 à 24, et donne ainsi, par simple lecture, le numéro de l'hyperbole de rang inférieur limitant le chenal. Il ne reste plus qu'à identifier le groupe de 24 chenaux dans lequel se trouve le récepteur.

Cette identification est faite comme décrit dans la première méthode. Les émetteurs ayant repris leur fonctionnement normal, les fréquences des postes A et B sont augmentées d'un pourcentage tel que le nombre de chenaux soit augmenté d'une unité. Par simple lecture sur le cadran mobile de l'indicateur du réseau rouge, dont l'origine a été

placée en face de l'aiguille, on obtient la lettre correspondant au groupe cherché de 24 chenaux.

L'identification est donc obtenue, dans ce cas, par deux lectures successives, l'une du numéro de la ligne, l'autre du groupe de lignes.

Identification du réseau vert (postes A et C).

Cette identification est faite de la même façon que pour le réseau rouge, en arrêtant les émissions B et D et en faisant émettre, par les deux autres postes, les fréquences suivantes :

A ..... 60 et 50 Kc/s
C ..... 90 et 80

La fréquence de comparaison était, dans le réseau normal

$$60 \times 3 = 90 \times 2 = 180 \text{ Kc/s}.$$

Les lignes seront donc, pour le réseau vert, réunies par groupes de 18 désignés par des lettres.

Identification du réseau mauve (postes A et D).

L'identification se fait en arrêtant les stations B et C et en faisant émettre, aux autres stations, les fréquences suivantes :

A ..... 60 et 50 Kc/s
D ..... 80 et 90

La fréquence de comparaison du réseau normal étant

$$60 \times 5 = 50 \times 6 = 300 \text{ Kc/s}.$$

les lignes du réseau mauve sont réunies par groupes de 30 désignés par des lettres.

En pratique, le cadran de l'indicateur unique d'identification comporte trois graduations correspondant aux trois réseaux : rouge, vert et mauve.

Une modulation basse fréquence, de fréquences déterminées, est envoyée avant le début du signal d'identification et commande le branchement des mélangeurs M_1, M_2 et l'éclairage de la graduation correspondant au réseau sur lequel les signaux d'identification vont être envoyés.

Les signaux d'identification sont envoyés, sur chaque réseau, à périodes fixes, très rapprochées.

VI. — INFLUENCE DE L'EFFET DE NUIT ET DES PARASITES ATMOSPHÉRIQUES.

Effet de nuit.

Dans un système de comparaison de phase d'ondes entretenues, l'effet d'ondes réfléchies, de plus faible amplitude que l'onde directe, est d'ajouter au vecteur direct V_D un vecteur tel que V_R (*fig.* 18).

L'indicateur enregistre le vecteur résultant.

Si l'on considère un vecteur réfléchi ayant une amplitude de 50 % du vecteur direct, l'erreur maximum est obtenue dans la position V_{R_1} de la figure 18 et a pour valeur, approximativement 30°. Lorsque le vecteur réfléchi occupe l'une des deux positions V_{R_2}, V_{R_3} il n'apparaît pas d'erreur.

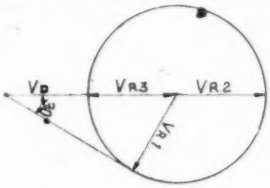


Fig. 18. — Effet de nuit. Diagramme vectoriel.

Le raisonnement précédent s'applique à la propagation d'une onde émise par une station. Le même effet peut se produire en même temps sur l'onde émise par la deuxième station.

Si l'erreur obtenue est dans la même direction, l'erreur totale est doublée. La probabilité d'obtention de cette erreur maximum est très faible. Pendant 50 % du temps, au contraire, les effets des deux ondes indirectes seront en opposition et l'erreur totale devra, ainsi, être réduite.

La figure 19 donne des courbes d'atténuation des ondes de 100 Kc/sec correspondant à l'onde directe [1] (courbes 1) et à l'onde réfléchie avec le coefficient de réflexion maximum 0,5 et les coefficients 0,3 et 0,25 (courbes 2).

On voit que, même avec le coefficient de réflexion maximum 0,5, l'onde réfléchie ne devient égale à l'onde directe qu'à une distance de 600 km sur terrain moyen. A 500 km, il est impossible de sauter une hyperbole sous la seule réserve que le signal résiduel est suffisant pour actionner l'indicateur lorsque le vecteur réfléchi, qui est environ 80 % du vecteur direct, est en opposition avec celui-ci. La puissance des émetteurs est suffisante pour assurer ce cas extrême de fonctionnement.

La valeur du coefficient de réflexion de 0,5 a été admise comme un maximum d'après des observations faites sur des émetteurs travaillant avec des antennes à grand développement horizontal. Il est probable que, dans les conditions actuelles d'émission avec antennes verticales, le coefficient maximum sera de l'ordre de 0,25. Le vecteur réfléchi n'atteindra alors 80 % qu'à une distance de 800 km environ et

(1) D'après Van den Pol, *Phil. Mag.*, vol. 38, 1919.

l'erreur maximum, à cette distance, serait ± 52° de phase.

Des observations systématiques ont été faites par l'Amirauté et par la Société Decca sur des émetteurs qui étaient installés, en 1944-1945 à l'embouchure de l'Escaut. La station de réception de l'Amirauté était située à Lythe Hill Farm (distance, 470 km) et celle de Decca : Brixton Road à Londres (distance, 370 km).

Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

	Lythe Hill Farm		Brixton Road	
	AB.	AC.	AB.	AC.
Limite théorique des variations possibles.....	±0,505	±0,423	±0,422	±0,375
Limite des variations observées.	±0,390	±0,250	±0,430	±0,365

Il est intéressant de noter que bien que la station de Brixton Road soit plus rapprochée des émetteurs que celle de Lythe Hill Farm, les variations observées à cette station ont été plus importantes. Cela provient, probablement, de ce que l'usine Decca se trouve entourée de bâtiments qui causent une atténuation anormale du rayon direct.

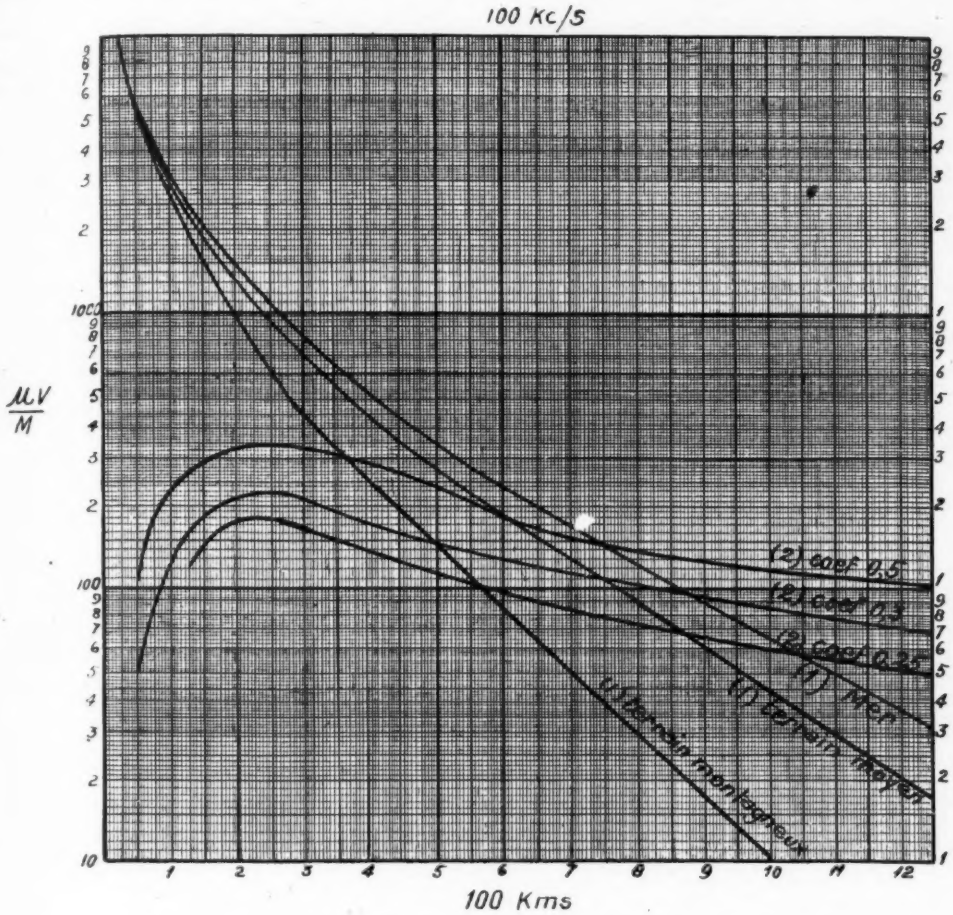


Fig. 19. — Courbes d'atténuation d'onde directe et d'onde réfléchie.

Influence des parasites atmosphériques.

Le système n'est pas paralysé par les parasites atmosphériques, l'effet de ceux-ci étant simplement de supprimer le couple sur les indicateurs. Il est donc nécessaire, pour que le parasite provoque l'erreur d'une hyperbole que sa durée soit égale ou supérieure à la durée de franchissement d'un demi-chenal.

Supposons un avion volant à 600 kmh; le chemin parcouru est de 10 km à la minute; l'avion franchit

20 hyperboles à la minute dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire s'il se déplace suivant l'axe focal. La durée du parasite doit donc être supérieure à 1,5 sec pour causer une erreur. De tels parasites, sans aucun trou, n'existent pas, bien que, à l'écoute, ils paraissent être continus. Leur durée maximum ne dépasse pas 1/100e de seconde [1]. Il y a lieu de remarquer que le couple, sur les indicateurs, réapparaît dès que le rapport signal-bruit redevient égal ou supérieur à l'unité.

VII. — INSTALLATION DE RÉCEPTION A BORD ET MODE OPÉRATOIRE.

Installation à bord.

Les explications données dans les chapitres précédents semblent montrer une assez grande complexité de l'installation de réception.

En réalité, l'installation de bord du système Decca comprend seulement :

1 récepteur avec dispositif d'alimentation,
3 indicateurs correspondant aux trois réseaux : rouge, vert et mauve,
1 indicateur d'identification.

Le câblage, extrêmement simple, comporte une boîte de jonction à laquelle aboutissent les câbles souples provenant respectivement des indicateurs et du récepteur.

Un câble sert au raccordement du récepteur au disjoncteur du réseau de bord.

L'installation générale est faite conformément à la figure 20.

Seuls les indicateurs sont placés à portée de l'utilisateur. La boîte de jonction et le récepteur peuvent être situés à des emplacements quelconques, même inaccessibles en vol.

Il y a lieu de remarquer que la boîte de jonction permet de connecter un deuxième jeu d'indicateurs.

Mode opératoire.

Pour mettre le récepteur en service, il suffit de placer l'appareil sous tension et d'attendre quelques instants pour que les lampes soient chaudes.

Les petites aiguilles des trois indicateurs prennent les positions correspondant aux différences de phases des trois réseaux au point considéré.

Si les coordonnées Decca sont connues au départ d'un aérodrome, par exemple, il suffit, au moyen des boutons « Calage », de caler les disques et les grandes aiguilles sur les lectures et nombres de ces coordonnées.

Si les coordonnées Decca sont inconnues, déterminer les numéros des hyperboles les plus voisines par l'utilisation de l'indicateur spécial et des cadrans mobiles des indicateurs pour caler les indicateurs comme précédemment.

Le récepteur est prêt à fonctionner et à donner, à chaque instant, par simple lecture sur les indicateurs, le point exact.

VIII. — RÉSULTATS D'ESSAIS

Nous rappellerons, d'abord, l'utilisation qui a été faite du « Navigateur Decca » pour le débarquement de Normandie, la navigation sur l'Escaut et le déminage de la Mer du Nord, opérations qui ont montré la grande précision du système.

La R. A. F. a étudié le fonctionnement en photographiant, simultanément, les indicateurs et la région survolée. Plus de 33 000 clichés ont, ainsi, été pris.

De nombreuses démonstrations ont été faites pendant la Conférence Internationale de Londres (PICAO), en février 1946, sur des avions partant de l'Aérodrome de Bassingbourn.

En ce qui concerne la portée, nous pouvons citer les essais suivants :

Un avion de la R. A. F. a navigué, au cours de 1945, d'Angleterre à Gibraltar, en n'utilisant pas d'autre procédé de navigation.

Par temps nuageux, au début de 1946, un avion, parti d'Angleterre, a navigué uniquement avec le « Navigateur Decca » et a percé la couche de nuages, pour atterrir sur l'aérodrome de Dublin.

L'aviateur bien connu, James Mollisson, a utilisé le même procédé dans la première partie d'un voyage entrepris le même mois. Parti de Saint-Margawn, près de Londres, avec un avion muni d'un récepteur portatif à piles, connecté à une antenne de 3 m de longueur, à 0,50 m du fuselage, il navigua, la plus grande partie du temps, sans visibilité et atteignit Lisbonne dans des conditions extraordinaires de précision. Un récit de ce voyage a été donné dans les *Evening News* du 16 mars 1946.

---

[1] R. Watson Watt, *The cathode ray oscillographe in radio research*, édité sous les auspices du « Department of Scientific and Industrial research », publié par *His Majesty's Stationnery Office*, Chapitre 3.1.

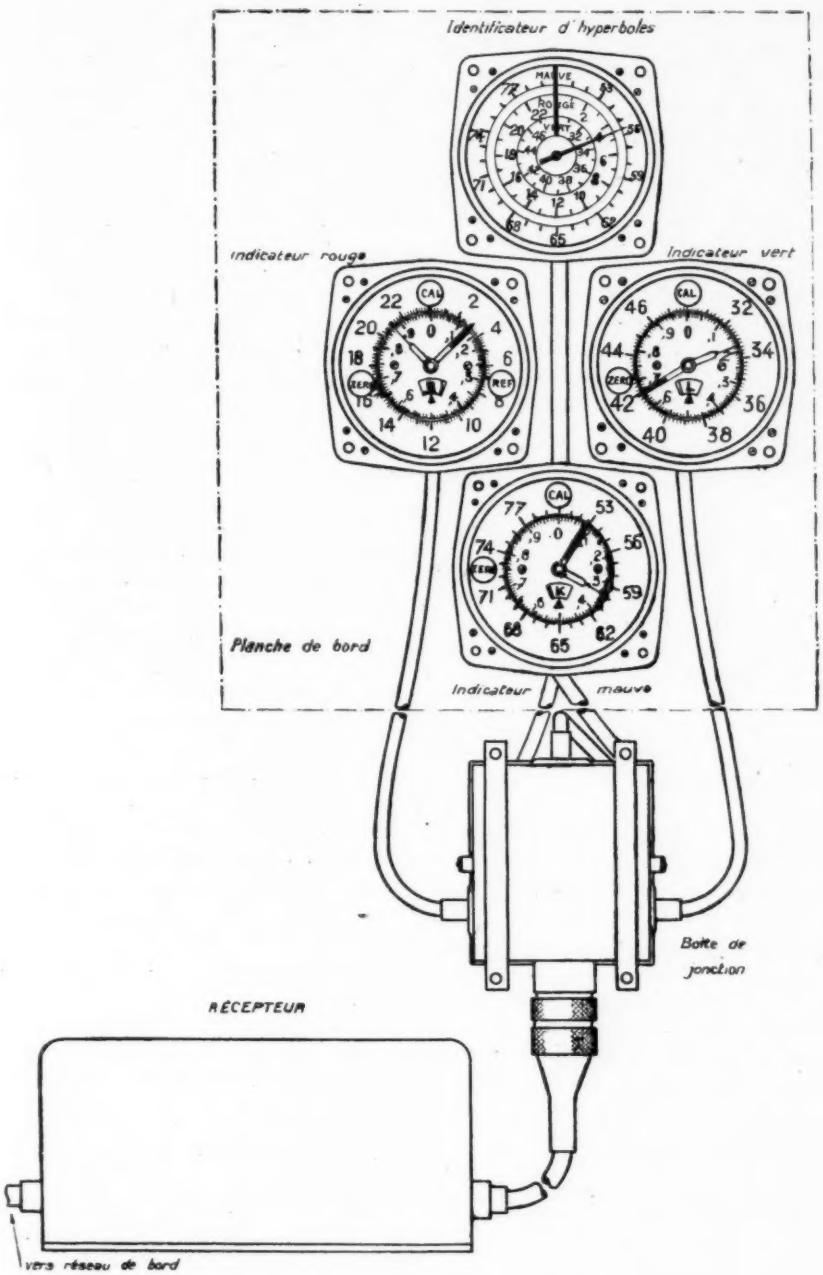


Fig. 20. — Installation des indicateurs sur la planche de bord.

De tous les essais effectués, on peut déduire les précisions obtenues de jour.

Elles sont indiquées dans le tableau suivant :

Distance de la ligne des émetteurs (km).	Précisions de jour [1] (% de chenal).
100	1,6
200	3,3
300	6
400	7,2
500	10
800	30

De nuit, la précision est diminuée par la réception simultanée de l'onde directe et de l'onde réfléchie par l'ionosphère. L'erreur de phase, c'est-à-dire la différence de phase de l'onde directe et de la résultante de l'onde directe et de l'onde réfléchie, dépend de la phase de l'onde réfléchie et de son amplitude par rapport à celle de l'onde directe. Les précisions obtenues de nuit sont indiquées dans le tableau ci-dessous :

Distance de la ligne des émetteurs (km).	Précisions de nuit [1] (% de chenal).
100	5
200	10
300	17
500	30

IX. — APPLICATIONS.

Les applications du « Navigateur Decca » sont nombreuses, tant dans le domaine maritime que dans le domaine aérien et même sur terre :

Navigation aérienne au-dessus des Continents.

On utilisera des chaînes d'émission fonctionnant sur des longueurs d'ondes de l'ordre de 3 000 m. Ces chaînes seront disposées à des distances de l'ordre de 800 km à 1 000 km, de façon à en permettre l'utilisation, même la nuit, avec une précision suffisante.

La figure 21 reproduit le projet d'équipement de l'Ouest de l'Europe établi à la suite de la Conférence Internationale préliminaire sur la Navigation aérienne (PICAO) de Londres (février 1946).

[1] Les chiffres donnés correspondent à une fraction de l'espace compris entre 2 hyperboles consécutives. La précision en mètres dépend de la position à l'intérieur du réseau, la distance séparant 2 hyperboles étant en effet extrêmement variable.

Essais des avions avant leur équipement complet.

L'emploi d'un récepteur Decca permettra de supprimer un navigateur expérimenté et un spécialiste radio, la navigation pouvant être faite avec sécurité et précision par n'importe quel membre de l'équipage d'essai.

Navigation aérienne et maritime sur les Océans.

On utilisera, dans ce but, les chaînes d'émission installées pour la navigation aérienne au-dessus des Continents, lorsque les distances sur mer ne seront pas trop considérables, ce sera le cas, par exemple, des chaînes établies en France, en Italie, en Algérie pour le balisage de la Méditerranée et la navigation côtière sur l'Océan Atlantique; des chaînes d'Angleterre, d'Écosse et de Suède, pour la Mer du Nord.

Pour les grandes traversées, telles que celles de l'Océan Atlantique, des installations spéciales seront réalisées. Des émetteurs d'une puissance de 50 kW sont actuellement en construction en Angleterre pour l'installation d'une chaîne expérimentale. Ces émetteurs fonctionneront sur des ondes longues de 20 000 et 25 000 m et utiliseront des antennes pylônes de 300 m.

Un premier groupe d'hyperboles d'orientation générale Nord-Sud sera créé par deux émetteurs synchronisés situés : l'un en Irlande, l'autre aux Bermudes (*fig.* 22). Deux autres émetteurs au Nord et au Sud de l'Irlande donneront des courbes d'orientation générale Est-Ouest. Après constatation des résultats et, pour obtenir un balisage de tout l'Atlantique, on envisage de déplacer l'un de ces derniers émetteurs et de l'installer dans la région de Dakar.

Remarquons que l'emploi de ces ondes très longues permettra l'utilisation du « Navigateur Decca » par les sous-marins en plongée.

Balisage des entrées de port et des estuaires.

Des chaînes, de petite puissance, seront installées en des points convenables pour produire des réseaux d'hyperboles quadrillant l'entrée du port ou l'estuaire (*fig.* 2). Les émetteurs pouvant être situés à des distances assez rapprochées des passes, la précision obtenue pourra être très grande. Cette utilisation a déjà était faite pour la navigation dans l'Escaut à la fin de la guerre.

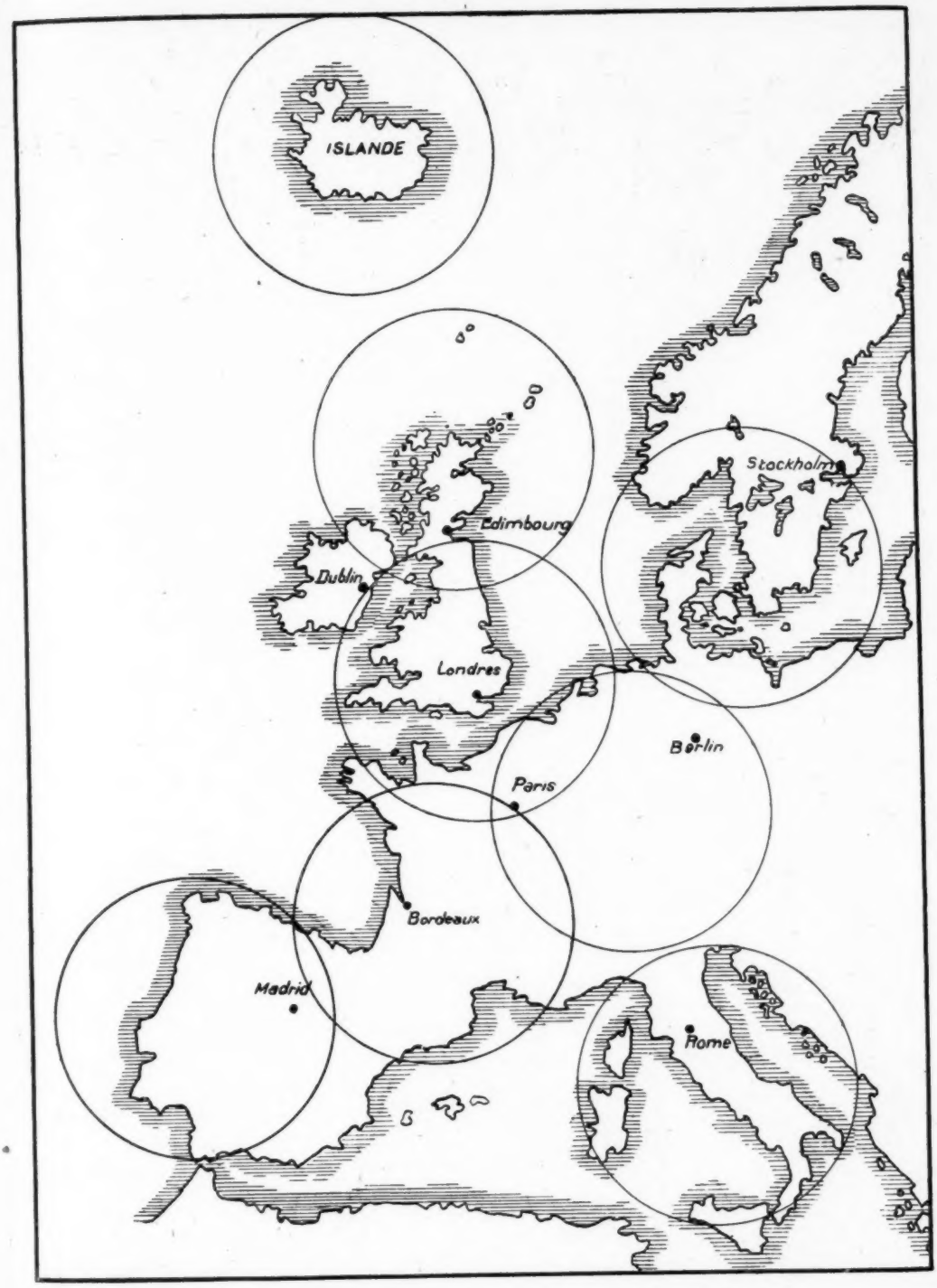


Fig. 21. — Projet d'implantation des chaînes Decca en Europe occidentale.

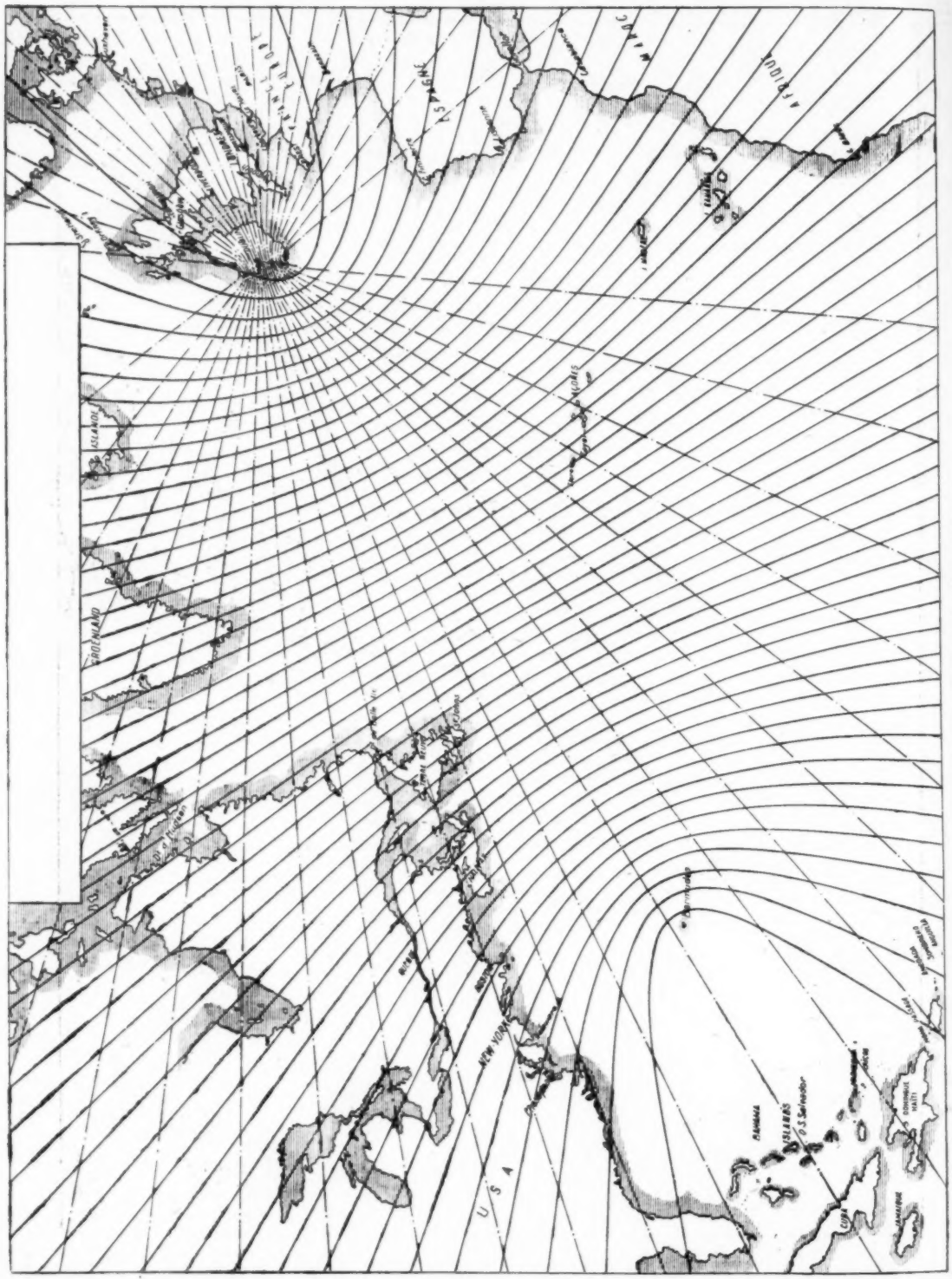


Fig. 22. — Ballage de l'Atlantique.

Hydrographie.

Des émetteurs transportables seront installés à proximité des régions où l'on fait le travail de cartographie et permettront de situer les sondages avec rapidité et précision.

Navigation automobile dans le désert.

Les automobiles et camions parcourant de vastes espaces désertiques pourront utiliser les chaînes d'émission établies pour la navigation aérienne.

Ce bref résumé des utilisations possibles du « navigateur Decca » montre l'importance de ce nouveau procédé de navigation.

Nous terminerons en indiquant que son emploi sera encore simplifié par un dispositif additionnel actuellement en cours de réalisation. Cet appareil, appelé « traceur de route » indiquera, directement, sur une carte, la route suivie.

Il permettra, en outre, le guidage automatique d'un avion suivant la ligne la plus courte d'un point à un autre point dont il suffira de connaître les « coordonnées Decca ».

Fig. 22. — Balisage de l'Atlantique.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME I.

Pages.

M. Ponte. — Introduction 3

R. Warnecke. — Contribution à la physique et à la technique des tubes électroniques d'émission dits à « modulation de vitesse » 6

H. Chireix. — Détermination de la puissance de bruit et du rapport signal/bruit dans le cas d'une transmission radioélectrique simple ou multiple sur ondes ultra-courtes effectuée au moyen de tops 55

J. Laplume. — Effet de blindage d'un tube cylindrique placé dans un champ magnétique perpendiculaire à son axe 65

P. Guénard. — Sur la possibilité d'une focalisation purement électrostatique dans un tube à modulation de vitesse à conversion par glissement 74

Informations générales sur les Compagnies françaises associées de T. S. F. et sur quelques réalisations de leurs centres de recherches pendant et malgré l'occupation 78

E. Girardeau. — La recherche technique dans le cadre des entreprises et des groupements .. 83

J. Ortusi. — Étude sur la diffraction et les réflexions des ondes guidées 87

F. Rabinovitch. — Sur une nouvelle méthode d'intégration approchée des équations différentielles du second ordre 134

F. Violet et R. Lecuir. — L'évolution de la technique des céramiques dans les laboratoires de la Compagnie générale de Télégraphie sans fil (C. S. F.). Procédés C. S. F. pour la préparation des céramiques de haute précision 152

H. Grumel et P. Morel. — Le problème du déminage terrestre. Détection de masses métalliques de faibles dimensions 160

Pages.

Errata aux *Annales de Radioélectricité* n° 1 168

M. Ponte. — Sur des apports français à la technique de la détection électromagnétique. 171

P. Nicolas. — Oscillations caractéristiques des solides conducteurs et des cavités électromagnétiques 181

A. Guerbilsky. — Exposé simplifié de quelques points principaux de la théorie des quadripôles 191

R. Champeix. — La mesure des différences de potentiel de contact et du courant de saturation dans les tubes à vide utilisant des cathodes à oxydes 208

Nguyen Thien-Chi. — Mesures de précision des paramètres cristallins par les rayons X ... 236

F. Violet et R. Lecuir. — L'évolution de la technique des céramiques dans les laboratoires de la Compagnie générale de Télégraphie sans fil (C. S. F.). Procédés C. S. F. pour la préparation des céramiques de haute précision 242

F. C. Mathieu. — Augmentation du rendement lumineux des projecteurs cinématographiques. 256

H. Grumel. — Matériel d'émission destiné à la Marine Marchande 264

Informations 274

Errata aux *Annales de Radioélectricité* n° 2 276

L. Bouthillon. — L'œuvre radioélectrique de Joseph Bethenod 279

P. Grivet et H. Bruck. — Le microscope électronique électrostatique 293

J. Bernier. — Les principales méthodes de résolution numérique des équations intégrales de Fredholm et de Volterra 311

Pages.

P. Guénard. — Effet de lentille des champs alternatifs dans les tubes à modulation de vitesse 319

J. Devaux. — L'étude des corps isolants par diffraction électronique 324

J. Laplume. — Calcul de la bande passante minimum d'un système de transmission d'impulsions 327

S. Gaillard. — L'équipement radioélectrique utilisé par le pilote d'un aérodyne et les installations au sol correspondantes 333

L. Bouthillon. — Les tenseurs et l'électricité. 345

Pages.

J. Bernier. — Sur le rendement de conversion des tubes à modulation de vitesse du type reflex 359

N. Thien-Chi. — Utilité des examens radiocristallographiques dans l'industrie des tubes à vide 383

R. Suart. — Récents développements de la technique des lampes d'émission. Une série de lampes modernes 391

P. Giroud. — Le navigateur « Decca » 409

Table des matières du tome I 435

Imp. GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS
123487

Dépôt légal, 1947. n° 284.